

FERNANDO MONTIBELLER

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FEIXES AO PROBLEMA DE
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE CURTO PRAZO PARA
SISTEMAS HIDROTÉRMICOS**

**FLORIANÓPOLIS
2003**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FEIXES AO PROBLEMA DE
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE CURTO PRAZO PARA
SISTEMAS HIDROTÉRMICOS**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

FERNANDO MONTIBELLER

Florianópolis, Março de 2003.

*À minha esposa, Daniela B. Montibeller,
pela compreensão, pelo incentivo, e pelo amor!*

*Aos meus pais, José Roberto e Durci,
pelo incentivo e pelo apoio!*

Aos meus avós pelo apoio prestado!

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Edson Luiz da Silva, pela oportunidade de desenvolvimento deste trabalho e orientação, compreensão, amizade e constante apoio durante todo o trabalho.

Ao colega Erlon Cristian Finardi pela disponibilidade e pelas discussões de fundamental importância.

A equipe técnica do Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica (Labplan) pelo apoio prestado ao longo da realização deste trabalho.

Ao colega Ederson Silveira da Costa, representando a Tractebel Energia, e a Colega Andréa Lúcia Costa pelas importantes informações prestadas.

À Universidade Federal de Santa Catarina e a Capes pelo apoio técnico e financeiro.

Ao professor Antonio J. A. Simões Costa e a professora Katia Campos de Almeida pela participação na banca examinadora.

A todos os professores, colegas, amigos e familiares que, alguma forma, contribuíram para realização deste trabalho.

A psicóloga Daniela Bonamente Montibeller pela contribuição na elaboração final desta dissertação e por toda compreensão e apoio prestado ao longo deste trabalho!

A Deus, por tudo!

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FEIXES AO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE CURTO PRAZO PARA SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

FERNANDO MONTIBELLER

Março/2003

Orientador: Prof. Edson Luiz da Silva, D. Eng.

Área de Concentração: Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica.

Palavras-chave: Sistemas Hidrotérmicos, *Unit Commitment*, Relaxação Lagrangeana, Otimização Não-Diferenciável.

Número de Páginas: 119.

O problema de planejamento da operação de curto prazo consiste em definir um conjunto ótimo de unidades geradoras que deve estar operando, bem como o seu nível de geração, para atender a demanda e reserva do sistema, a cada hora, respeitando as restrições operativas das unidades, surgindo o problema de *unit commitment*. Sendo o sistema eletro-energético brasileiro formado basicamente por fontes geradoras de origem hidráulica, este trabalho oferece mais detalhes sobre a modelagem das unidades hidrelétricas, bem como do tratamento matemático resultante dessa modelagem. O problema matemático resultante é não-linear, inteiro-misto e de grande porte, não sendo prática sua solução na forma primal, necessitando de técnicas de decomposição, como a Relaxação Lagrangeana. Numa primeira etapa o problema é decomposto em um subproblema termelétrico e um outro subproblema hidrelétrico. O subproblema hidrelétrico, por sua vez, é separado em um subproblema de variáveis contínuas e em um subproblema de variáveis inteiras. O problema dual decorrente da relaxação é não-diferenciável. A solução desse tipo de problema é obtida pela aplicação de Métodos de Otimização Não-diferenciável que utilizam a informação do subgradiente em seu processo de convergência. Dentre esses métodos estão: Método do Subgradiente; Método dos Planos Cortantes; Método de Feixes, que é considerado uma versão estável do método dos planos cortantes e possui um critério de convergência bem definido. Neste trabalho o método de feixes é aplicado na solução do problema dual do planejamento da operação de curto prazo para uma configuração hidrotérmica do sistema brasileiro, descrevendo em detalhe como este método trabalha.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

APPLICATION OF BUNDLE METHOD TO THE SHORT-RUN OPERATION PLANNING PROBLEM IN HYDRO-THERMAL POWER SYSTEMS

FERNANDO MONTIBELLER

March/2003

Supervisor: Prof. Edson Luiz da Silva, D. Eng.

Concentration: Power Systems Planning.

Keywords: Hydrothermal Systems, *Unit Commitment*, *Lagrangian Relaxation*,
Nondifferentiable optimization.

Number of Pages: 119.

The problem of short-run operation planning consists on defining an optimal set of generating units due to operate, as well as the output level is defined in this schedule, which in turn has to meet the demand and reserve level, for each hour, while complying with the units' operating constraints, arising the *unit commitment* problem. Because the Brazilian power system is composed basically by hydroelectric units, this work proposes a more detailed modeling of this kind of units, as well as the mathematical construction resulting from such a modeling. The resulting mathematical problem is non-linear, mixed-integer and of large-scale whose solution under its primal version is not always practical, nor even feasible, needy special techniques, such as *Lagrangian Relaxation*. In a first stage, the overall problem is divided into a thermoelectric and a hydroelectric problem. The hydroelectric problem is, in turn, divided into a sub-problem of continuous variables and a number of sub-problems of integer variables. The dual problem resulting from the relaxation is nondifferentiable. The solution of this kind of problem is obtained through the application of nondifferentiable optimization methods that use information from the sub-gradient. Among the various methods are: the Sub-gradient method; the Cutting-Planes method; the Bundle Method, which is considered as a stable version of the Cutting-Planes method and with a well defined convergence condition. In this work, the bundle method is used for the solution of the dual problem of the short-run operation planning problem to a real Brazilian hydro-thermal power system configuration. The details of this method's procedure are presented.

SUMÁRIO

SUMÁRIO	1
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	3
CAPÍTULO 2 – UNIT COMMITMENT	8
2.1 – INTRODUÇÃO	8
2.2 – NECESSIDADE DO UNIT COMMITMENT	8
2.2.1 – <i>Exemplo Ilustrativo</i>	9
2.3 – ALOCAÇÃO DE UNIDADES TERMELÉTRICAS	11
2.4 – ALOCAÇÃO DE UNIDADES HIDRELÉTRICAS	16
2.4.1 – <i>Operação dos Sistemas Hidrelétricos</i>	18
2.4.2 – <i>Função de Produção das Unidades de Geração Hidrelétricas</i>	20
2.4.2.1 – <i>Altura de Queda Líquida</i>	21
2.4.2.2 – <i>Rendimento da Unidade Geradora Hidrelétrica</i>	23
2.4.3 – <i>Zonas Proibidas de Geração das Unidades Hidrelétricas</i>	25
2.5 – CONCLUSÕES	26
CAPÍTULO 3 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	28
3.1 – INTRODUÇÃO	28
3.2 – SISTEMA HIDRELÉTRICO	28
3.2.1 – <i>Restrição de Conservação da Água nos Reservatórios</i>	28
3.2.2 – <i>Limites do Volume Armazenado e do Vertimento dos Reservatórios</i>	30
3.2.3 – <i>Limites de Potência das Zonas Permitidas de Geração</i>	30
3.2.4 – <i>Mínimos Uptime e Downtime das Unidades Hidrelétricas</i>	31
3.2.5 – <i>Condições Iniciais</i>	33
3.2.6 – <i>Custo de Partida das Unidades Hidrelétricas</i>	33
3.2.7 – <i>Função de Custo Futuro</i>	34
3.3 – SISTEMA TERMELÉTRICO	35
3.3.1 – <i>Limites de Potência das Unidades Geradoras</i>	35
3.3.2 – <i>Custo Operativo das Usinas Termelétricas</i>	35
3.4 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	36

3.5 – RELAXAÇÃO LAGRANGEANA.....	37
3.5.1 – <i>Relaxação das Restrições de Demanda e Reserva.....</i>	38
3.5.2 – <i>Relaxação das Restrições de Limites das Zonas Permitidas de Geração.....</i>	40
3.6 – CONCLUSÕES.....	47
CAPÍTULO 4 – SOLUÇÃO DO PROBLEMA DUAL.....	49
4.1 – INTRODUÇÃO.....	49
4.2 – PROPRIEDADES DO PROBLEMA DUAL.....	49
4.3 – MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO NÃO-DIFERENCIÁVEL.....	54
4.3.1 – <i>Método do Subgradiente.....</i>	55
4.3.2 – <i>Método dos Planos Cortantes.....</i>	58
4.3.3 – <i>Método de Feixes.....</i>	63
4.3.3.1 – Compressão do Feixe.....	69
4.3.3.1 – Exemplo Didático.....	70
4.4 – CONCLUSÕES.....	77
CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FEIXES.....	79
5.1 – INTRODUÇÃO.....	79
5.2 – ALGORITMO DO MÉTODO DE FEIXES.....	79
5.3 – RECUPERAÇÃO DA SOLUÇÃO PRIMAL.....	81
5.4 – DESCRIÇÃO DO PROBLEMA EXEMPLO.....	83
5.4.1 – <i>Configuração Hidrotérmica.....</i>	83
5.4.2 – <i>Dados da Simulação.....</i>	86
5.5 – OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA.....	89
5.5.1 – <i>Resultados Para Curva de Carga 1 – Dias Úteis.....</i>	89
5.5.2 – <i>Resultados Para Curva de Carga 2 – Fins de Semana.....</i>	97
5.6 – CONCLUSÕES.....	101
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES.....	103
ANEXO A.....	107
A.1 – INTRODUÇÃO.....	107
A.2 – ALTURA DE QUEDA LÍQUIDA CONSTANTE.....	107
A.3 – FUNÇÃO DE PRODUÇÃO QUADRÁTICA CÔNCAVA.....	111
A.4 – CONCLUSÕES.....	114
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	116

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Uma das atividades que tem despertado maior interesse pela humanidade é, sem dúvida, o aproveitamento eficiente dos recursos energéticos disponíveis nos sistemas elétricos de potência, sejam eles de natureza térmica ou hidráulica. O uso intensivo da energia elétrica nos últimos anos, em suas diversas aplicações, e as transformações ocorridas no setor elétrico fizeram com que a sociedade buscasse a maior eficiência na utilização destes recursos, procurando obter o máximo de benefícios possíveis.

O gerenciamento dos recursos energéticos não é tarefa simples, em especial para os sistemas hidrotérmicos, como o caso do sistema brasileiro. Este gerenciamento está relacionado tanto com as incertezas sobre afluências futuras que chegam aos reservatórios das usinas hidrelétricas, atendimento dos limites operativos dos reservatórios de regularização plurianual, bem como pelas características complexas de operação das unidades geradoras termelétricas e hidrelétricas individualmente, e as limitações do sistema de transmissão de energia elétrica.

Dada a complexidade do processo de decisão, o problema de planejamento da operação energética é dividido em modelos menores e coordenados entre si [1-6]. Que podem ser problemas de planejamento de mais longo prazo (cinco anos), até problemas de planejamento da operação de curto prazo (máximo, sete dias). Além da definição da operação ótima do sistema, usualmente, esses modelos fornecem subsídios para a formação do preço da energia elétrica.

Neste trabalho estamos interessados particularmente no problema de planejamento da operação de curto prazo de sistemas hidrotérmicos que, no caso brasileiro, tem o intuito de desagregar as metas entregues pelo problema de mais longo prazo: nível dos reservatórios e função de custo futuro. Neste contexto são evidenciadas as características físicas individuais das unidades geradoras do sistema em detrimento as incertezas de longo prazo,

uma vez que o horizonte de planejamento é, em geral, de 24, 48 ou 168 horas, com intervalo de divisão de 1 hora ou 30 minutos.

Sabe-se que as fontes de geração de energia elétrica podem ser de origem térmica ou hidráulica que constituem as usinas termelétricas e hidrelétricas. Estas, por sua vez, são compostas pelas unidades de geração. O objetivo principal no planejamento da operação de curto prazo é definir um programa ótimo de geração, para um determinado horizonte de tempo, com menor custo de operação possível. Este programa determina quais unidades geradoras devem estar operando e qual o seu nível de geração para atender a uma determinada demanda e reserva girante de energia elétrica, a cada hora do dia, devendo ser obedecido um conjunto de restrições operativas das unidades e do sistema. Desta forma, surge o conceito de alocação de unidades geradoras ou *unit commitment* [7-26].

No *unit commitment* termelétrico [19-25] as características termodinâmicas das unidades geradoras são modeladas. Estas características estão associadas com o custo de partida e a limites operativos, tais como a restrição de rampa¹. O problema de *unit commitment* para o sistema hidrelétrico [7-18,26] deve representar as restrições de mínimos *uptime*² e *downtime*³ e o custo de partida das unidades geradoras hidrelétricas, para evitar sobre-custos operativos. Adicionalmente, as zonas proibidas de geração que estão relacionadas a regiões em que as unidades não podem operar sob pena de excessivos desgastes mecânicos, também devem ser consideradas.

As unidades hidrelétricas são representadas no modelo do *unit commitment* pela sua função de produção [7] onde o custo de operação é representado indiretamente pela função de custo futuro [1-6] acoplada ao último estágio do horizonte do problema. A modelagem do sistema hidrelétrico é dita acoplada no espaço e no tempo pela disposição em cascata das usinas nos rios, e pelo limites de armazenamento de energia (água) nos reservatórios, tornando o problema de planejamento da operação de curto prazo complexo.

O modelo de *unit commitment* dá origem a problemas de otimização de solução não trivial, onde as suas principais características são apresentadas a seguir:

¹ Restrições de rampa estão relacionadas, por exemplo, com a trajetória de tomada de carga que as unidades termelétricas devem seguir quando estão partindo.

² Tempo mínimo que a unidade deve permanecer ligada uma vez que tenha sido colocada em operação.

³ Tempo mínimo que a unidade deve permanecer desligada uma vez que tenha sido retirada de operação.

- Grande porte, em função ao elevado número de unidades que compõe os sistemas elétricos, em especial o brasileiro, onde as usinas hidrelétricas chegam a ter dezenas de unidades geradoras;
- Não-linear, devido à presença desta característica nos custos das unidades termelétricas e da função de produção das unidades hidrelétricas;
- Inteiro-misto e, portanto, não-convexo. O processo de decidir em ligar ou desligar unidades geradoras durante os estágios de planejamento, requer que se as unidades sejam modeladas por meio do uso de variáveis inteiras (por exemplo, 0 = unidade desligada; 1 = unidade ligada), tornam o problema de natureza combinatória que é necessariamente não-convexo. Outra fonte de não-convexidade é também o complexo mecanismo de produção de energia elétrica das unidades hidrelétricas, que origina uma função de produção não-convexa.

Desta maneira, tem-se despendido grandes esforços no sentido de buscar métodos matemáticos para resolver, de maneira mais eficiente, o problema de planejamento da operação de curto prazo considerando modelos cada vez mais detalhados para o *unit commitment*. Dentre as metodologias mais empregadas para solução deste problema estão a Relaxação Lagrangeana [9,20], a Programação Dinâmica [19] e Branch and Bound [21].

Em particular, o método da Relaxação Lagrangeana tem apresentado bons resultados na solução desse tipo de problema, uma vez que, procura tirar proveito da estrutura do problema, decompondo-o em subproblemas mais simples de serem resolvidos.

Como foi dito, o problema de planejamento da operação de curto prazo é inteiro-misto e, portanto, não-convexo pela presença de variáveis inteiras na sua formulação. Desta forma, o seu problema dual correspondente é, necessariamente, não-diferenciável, caracterizando-se pela ausência da informação do gradiente da função [28-30]. Este tipo de problema necessita de métodos de otimização especiais que viabilizam a maximização da função dual, os chamados Métodos de Otimização Não-Diferenciável [28,29], que são baseados em informações do subgradiente.

Dentre os métodos de otimização não-diferenciável estão: o Método do Subgradiente [28,29], que utiliza no processo iterativo somente a informação do subgradiente atual da função; o Método dos Planos Cortantes [23,28,29] e o Método de Feixes [18,23,28,31-35] que procedem na maximização da função dual usando o conjunto de subgradientes e valores da função dual previamente calculados.

O método do subgradiente é caracterizado por não possuir um critério de parada, por oscilações durante o processo de solução e também pelo excessivo número de iterações. O método dos planos cortantes possui um critério de parada bem definido, contudo, também é instável [23].

O método de feixes constitui um processo iterativo estável, sendo evitadas oscilações presentes nos outros métodos. É adequado à solução de problemas não-diferenciáveis. Não obstante essas características positivas a cada iteração do método, existe a necessidade de se resolver um problema de programação quadrática.

Outro ponto relevante na solução do problema dual de planejamento da operação de curto prazo é que, mesmo obtida a maximização da função dual, as restrições relaxadas podem não ser atendidas e assim é necessário recuperar estas restrições, obtendo-se uma solução primal factível para o problema, onde são aplicadas heurísticas que dependem da estrutura do problema relaxado.

Tendo em vista a predominância hidráulica do parque gerador brasileiro, neste trabalho é dada ênfase à modelagem dessa fonte de geração, sendo o método de feixes aplicado na solução do problema dual resultante da decomposição do problema.

Cabe justificar que o trabalho apresentado aqui pertence a um projeto de maior abrangência desenvolvido no Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica (LabPlan), o qual está voltado à modelagem e solução de problemas relacionados aos aproveitamentos energético no Brasil. Assim, devido à dificuldade em se buscar, em único estudo, resolver o problema como um todo, este trabalho tem como objetivo principal a aplicação de métodos apropriados para maximização das funções duais, que resultam das decomposições apresentadas e, dessa maneira, algumas simplificações, podem ser adotadas sem prejuízo para os objetivos pretendidos. Tais simplificações, descrita no Anexo A, correspondem a uma aproximação da função de produção das unidades hidrelétricas por uma função quadrática da vazão turbinada na própria unidade.

A disposição básica do trabalho é apresentada a seguir. Inicialmente, no Capítulo 2 são mostradas as motivações que levam a modelar o *unit commitment* no contexto do problema de planejamento da operação de curto prazo. Adicionalmente é feita a apresentação das características operativas das unidades termelétricas e hidrelétricas, bem como do sistema em que estão inseridas.

O Capítulo 3 tem por objetivo mostrar a formulação matemática do problema de planejamento da operação de curto prazo onde o sistema hidrelétrico é detalhado considerando o *unit commitment*. No tocante ao sistema termelétrico, este é modelado de forma simplificada. Ainda neste capítulo, é apresentada a metodologia empregada na decomposição do problema em questão dando origem ao seu correspondente problema dual.

O Capítulo 4 trata das propriedades matemáticas do problema dual obtido no Capítulo 3, bem como dos métodos de otimização não-diferenciável disponíveis para solução deste problema, em especial o método de feixes.

No Capítulo 5 é apresentada a solução do problema de planejamento da operação de curto prazo mostrado no Capítulo 3 por meio da aplicação do método de feixes e pela obtenção de uma da solução primal factível. Adicionalmente, a metodologia proposta é testada em uma configuração hidrotérmica cujos resultados são apresentados e analisados.

Por fim, no Capítulo 6 são registradas as principais conclusões.

CAPÍTULO 2

UNIT COMMITMENT

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o problema do *unit commitment* ou alocação de unidades geradoras no contexto do problema de planejamento da operação de curto prazo dos sistemas hidrotérmicos. Adicionalmente, caracterizam-se as particularidades das unidades termelétricas e hidrelétricas, onde especial atenção é dada aos sistemas hidrelétricos, em função da predominância desses recursos no sistema elétrico brasileiro.

2.2 NECESSIDADE DO *UNIT COMMITMENT*

O principal objetivo nos sistemas elétricos de potência é o atendimento a demanda com o menor custo possível. As recentes mudanças ocorridas no setor de energia elétrica, que passou a ter características de mercado, impulsionaram a necessidade de representações mais sofisticadas das fontes de geração nos modelos matemáticos, de maneira que se obtenha, como resultado, maior eficiência econômica do setor.

O consumo de energia elétrica varia a cada hora do dia [19], pois acompanha as atividades diárias das pessoas. Assim, a demanda por energia elétrica é menor no final da noite e na madrugada quando as pessoas estão fora de atividade, e maior durante o dia e início da noite quando as indústrias estão em plena produção, bem como a maior parte dos consumidores comerciais e residenciais estão em atividade. Associado a esse fato, a demanda de energia elétrica é diferente nos finais de semana em relação aos dias úteis.

A variação na demanda de energia elétrica afeta diretamente a operação dos sistemas de energia elétrica, pois quando ocorre alteração na carga, o nível de potência das unidades geradoras deve acompanhá-la. Ou ainda, podemos considerar que a variação na car-

ga causa a entrada ou saída de operação de unidades geradoras do sistema, seja por atingir algum limite operativo ou pelo seu custo.

O ponto central é definir quais unidades geradoras devem ser ligadas (*committed*) ou desligadas (*decommitted*) e quanto o nível de geração associada às mesmas para atender a demanda a cada hora, da forma mais econômica possível. Essa economia está associada à possibilidade de se decidir por manter unidades de menor custo em operação e desligar outras com custos mais elevados. A seguir, com o objetivo de ilustrar o problema em questão, é apresentado um exemplo para um valor fixo de carga.

2.2.1 Exemplo ilustrativo

Seja um sistema com três unidades geradoras, cujas características são apresentadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Características das Unidades Geradoras – Exemplo Ilustrativo.

Unidade	Potência Mínima (MW)	Potência Máxima (MW)	Custo de Operação	
			Fixo (\$)	Variável (\$/MW)
1	50	300	0	10
2	20	250	0	5
3	60	200	200	6

Supondo que temos que atender a uma demanda de 420 MW, a questão central é: qual a unidade ou conjunto de unidades que deve ser usado para suprir, mais economicamente, a carga?

Para resolver este problema, podemos experimentar todas as combinações possíveis, com as três unidades, como mostrado na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Possíveis Combinações para as Unidades – Exemplo Ilustrativo.

Estado da Unidade			Despacho (MW)			Custo Variável (\$)			Custo Total (\$)
1	2	3	1	2	3	1	2	3	
D	D	D	Infactível						
D	D	L	Infactível						
D	L	D	Infactível						
L	D	D	Infactível						
D	L	L	0	250	170	0	1250	1220	2470
L	D	L	220	0	200	2200	0	1400	3600
L	L	D	170	250	0	1700	1250	0	2950
L	L	L	50	250	120	500	1250	920	2670

L – Unidade ligada;

D – Unidade desligada.

A alocação ótima, para suprir a carga, requer as Unidades 2 e 3 ligadas e a Unidade 1 desligada, portanto qualquer alternativa diferente de alocar as unidades é mais cara. Em outras palavras, podemos “ganhar dinheiro” desligando a Unidade 1 e ainda assim manter o atendimento a demanda sem comprometer a segurança do sistema.

Embora, a solução para o problema acima seja óbvia, para problemas reais de grande porte [20,30] a solução não é trivial, devido à dinâmica da carga, que se altera a cada período de tempo, e a grande quantidade de unidades que compõe o parque gerador dos sistemas elétricos. Exemplos semelhantes a este que é apresentado, a respeito dos fundamentos do *unit commitment*, podem ser vistos em [19].

Outra importante motivação para solucionar o problema do *unit commitment* é a possibilidade de representar características especiais, como o custo de partida, que dependem do estado das unidades a cada período de tempo. O estado de uma unidade geradora é definido por dois tipos de informações: um identifica se a unidade está ligada ou desligada em um determinado período; o outro se refere ao número de períodos na qual a unidade estava ligada ou desligada até atingir esse período. Estas características introduzem interdependência entre os períodos de tempo no horizonte de estudo, pois decisões futuras de comissionar as unidades geradoras dependem de decisões tomadas no passado. A não representação destas características no modelo do *unit commitment* podem ocasionar custos indesejáveis na operação real de um sistema elétrico, bem como despachos inviáveis.

Além de ser de grande porte, como mencionado anteriormente, o problema do *unit commitment* é do tipo inteiro-misto [10,12], devido à necessidade de representar as unidades geradoras por meio de variáveis de estado ou inteiras (por exemplo, 0 = unidade desligada ou 1 = unidade ligada), o que garante que o problema seja não-convexo, e não-linear em função da presença destas características no comportamento físico das unidades. A obtenção da solução exata para este tipo de problema pode não ser prática e, desta forma, é conveniente a utilização de métodos de decomposição para a sua solução, como por exemplo, a Relaxação Lagrangeana, que tem sido aplicada com sucesso em diversos trabalhos, tais como em [9,20].

Usualmente, o problema de *unit commitment* é incorporado ao planejamento da operação de curto prazo [7] com horizonte de 24, 48 ou 168 horas. Neste horizonte se dá preferência por representar as características individuais das unidades geradoras em detrimento às incertezas que estão presentes em problemas de planejamento energético de longo prazo [1,2]. Tais características diferem com a natureza da fonte geradora, termelétrica ou hidrelétrica e, assim, requerem modelagens distintas.

2.3 ALOCAÇÃO DE UNIDADES TERMELÉTRICAS

A alocação de unidades para sistemas com predominância de usinas de fontes termelétricas tem sido objeto de estudo de diversos trabalhos na literatura e é, usualmente, denominado de *thermal unit commitment* [19-25].

O *thermal unit commitment* consiste em definir quais unidades termelétricas devem estar operando e qual seu nível de geração a cada hora, dentro de um de planejamento, de maneira que o custo operativo seja o menor possível. Em geral, na formulação deste problema o parque gerador hidrelétrico não é detalhado ou nem mesmo considerado.

Outro objetivo do *unit commitment* é o atendimento a reserva de geração, a qual é denominada de reserva girante [22]. Essa reserva é necessária devido a possíveis contingências de linhas de transmissão e/ou geração, ou seja, deve se considerar uma parcela maior de energia disponível para atender a eventuais contingências no sistema elétrico.

Além da reserva, as restrições de mínimos *uptime* e *downtime* [21], e de rampa [7,24], que decorrem das características termodinâmicas das unidades geradoras, também influenciam à operação energética do sistema. Tais características estão associadas à quan-

tidade de vapor disponível na caldeira para acionar a turbina da unidade. A quantidade de vapor, por sua vez, depende das condições de temperatura e pressão da caldeira que aumentam à medida e que se incrementa a produção de calor nas fornalhas. O incremento de calor para gerar vapor nas turbinas é feito de forma gradual ao longo do tempo, impedindo variações bruscas de potência de saída.

Desta maneira, a operação das unidades termelétricas é dependente do tempo de aquecimento das suas fornalhas e por isso devem ser consideradas no modelo do *unit commitment* termelétrico.

As restrições de mínimo *uptime* e *downtime* determinam o número de períodos de tempo que a unidade deve permanecer em um estado, ligada ou desligada, uma vez que tenha entrado nesse estado.

A restrição de rampa determina o tempo que a unidade termelétrica necessita para alterar a sua potência quando em operação nominal, partida ou desligamento. Esse tempo é, em geral, superior ao intervalo de tempo considerado em cada período (uma hora). Assim, para uma unidade termelétrica entrar em operação ou ser desligada deve seguir uma trajetória pré-definida, e quando em operação nominal deve respeitar limites de acréscimo e decréscimo na sua potência de saída. A Tabela 2.3 apresenta as características de operação de algumas unidades termelétricas que compõe o sistema elétrico brasileiro.

Tabela 2.3 – Características Operativas de Unidades Termelétricas.

Unidade	Usina Termelétrica	Limites de Potência (MW)		Tempo de Partida (horas)	Rampa Máxima de Tomada de Carga (MW/hora)	
		Mínimo	Máximo		Subida	Decida
1	Jorge Lacerda A	33	66	8	60	60
1	Charqueadas	5	18	3	2	2

Pela Tabela 2.3, uma vez retirada de operação a Unidade Geradora 1 da Usina Termelétrica de Jorge Lacerda A, necessita de oito horas para partir novamente, ou seja, aquecer sua caldeira até a temperatura que possa disponibilizar energia elétrica à rede de transmissão. Essa mesma unidade, uma vez despachada na potência mínima, pode chegar a sua potência máxima em 33 minutos, e assim, não há restrição de rampa quando a unidade

opera sob condição nominal, desde que o intervalo de tempo considerado para cada período de planejamento seja uma hora.

Com características diferentes, a Unidade Geradora 1 da Usina Termelétrica de Charqueadas, quando em operação nominal, só pode ter acréscimos ou decréscimos máximo de 2 MW a cada hora. Ainda na Tabela 2.3, o tempo mínimo de partida para esta unidade é de três horas.

A Figura 2.1 ilustra a aplicação das restrições de rampa, para Unidade 1 da Usina Termelétrica de Charqueadas.

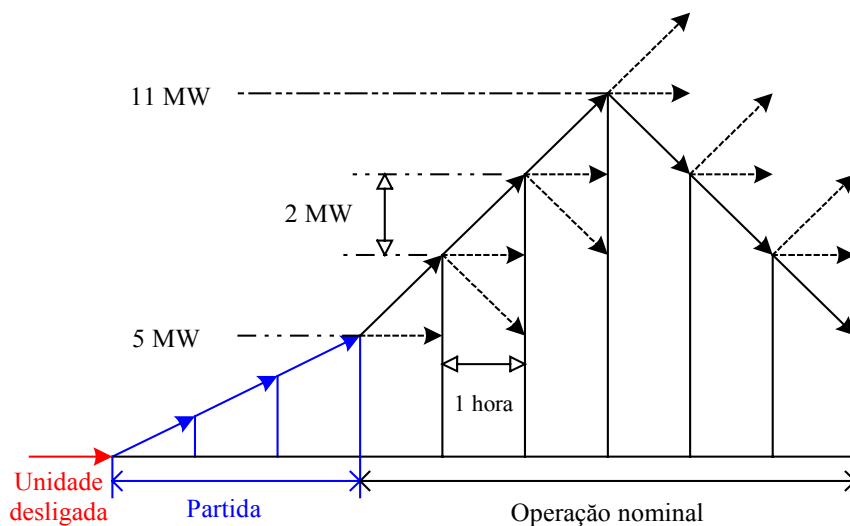


Figura 2.1 - Aplicação das restrições de rampa – Unidade 1 da Usina de Charqueadas.

Na Figura 2.1 a unidade deve seguir uma trajetória viável¹ de partida até alcançar a potência mínima de operação 5MW. A partir deste ponto a unidade pode ter acréscimos máximos de 2 MW até chegar a potência de 11 MW. Da mesma forma, para retornar a sua potência mínima ela necessita de pelo menos 3 horas. Adicionalmente, após a unidade entrar em operação nominal ela pode seguir outras trajetórias, como as apresentadas em linhas tracejadas na figura.

No modelo clássico do problema de *unit commitment* as unidades termelétricas são representadas pelo seu custo de produção que pode ser expresso por uma função quadrática crescente com a potência.

A Figura 2.2 mostra uma curva típica de entrada e saída para usinas termelétricas, que ilustra o custo incremental, C , e a potência da unidade, pt .

¹ Não ultrapassar rampa de subida.

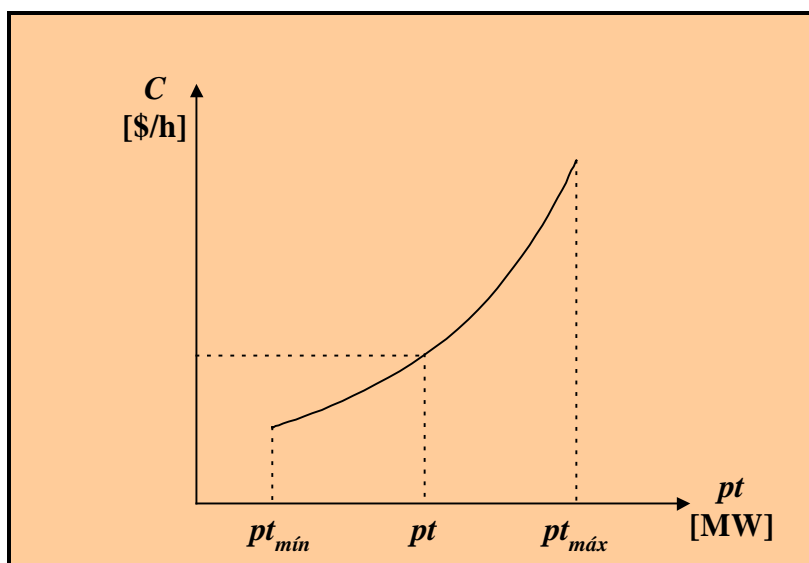


Figura 2.2 – Curva típica de entrada e saída de Usinas Termelétricas.

Outra característica termodinâmica das unidades termelétricas é o custo de partida [19,22] que está relacionado com o tempo que a unidade permanece desligada e, desta forma, deve ser considerado no problema. Em uma caldeira, a quantidade de combustível (custo) necessária para elevar a sua temperatura até o patamar de operação normal é proporcional ao tempo que a unidade foi resfriada (desligada), ou seja, quanto maior o tempo de desligamento maior o custo para partir a unidade.

Entretanto, existem duas estratégias de operação das caldeiras, quando as unidades termelétricas são retiradas de operação: a primeira, chamada de *cooling*, permite que a caldeira seja resfriada totalmente depois que a unidade foi desligada; e a segunda (chamada *banking*) onde a temperatura de operação da caldeira é mantida, gastando-se certa quantidade de combustível [19]. A primeira estratégia economiza combustível à medida que o tempo fora de operação da unidade se estende muito, durante o horizonte de planejamento. Já a aplicação da segunda estratégia é preferível quando a unidade permanece fora de operação intervalos de tempo mais curtos.

Além destes custos, o aumento nos custos de manutenção devido ao estresse mecânico causado durante a partida, contribui na formação do custo de partida das unidades termelétricas.

Na maioria dos mercados de energia elétrica o *unit commitment* ou o planejamento da operação de curto prazo é de responsabilidade de um órgão centralizado [1], no caso

brasileiro o ONS (Operador Nacional do Sistema Elétrico). Para realizar o despacho esses órgãos usam as curvas de custos incrementais das usinas termelétricas ou a oferta de preços declarados pelos próprios agentes geradores termelétricos [36,37]. Esse conjunto de informações é chamado de *bid*² e suas características variam de um mercado para outro.

Um dos mercados mais tradicionais que utilizam este mecanismo é o do sistema Inglês [36]. Nele, os geradores termelétricos devem ofertar, diariamente, ao operador central as seguintes informações: sua capacidade máxima a cada meia hora do dia, o preço da energia elétrica produzida pelas unidades, o preço de partida para as unidades, entre outras características operativas das unidades.

O preço da energia elétrica para as unidades termelétricas é ofertado na forma de uma função linear por partes. Esta função é conhecida como *Willans line* [36], que está ilustrada na Figura 2.3, para uma unidade termelétrica.

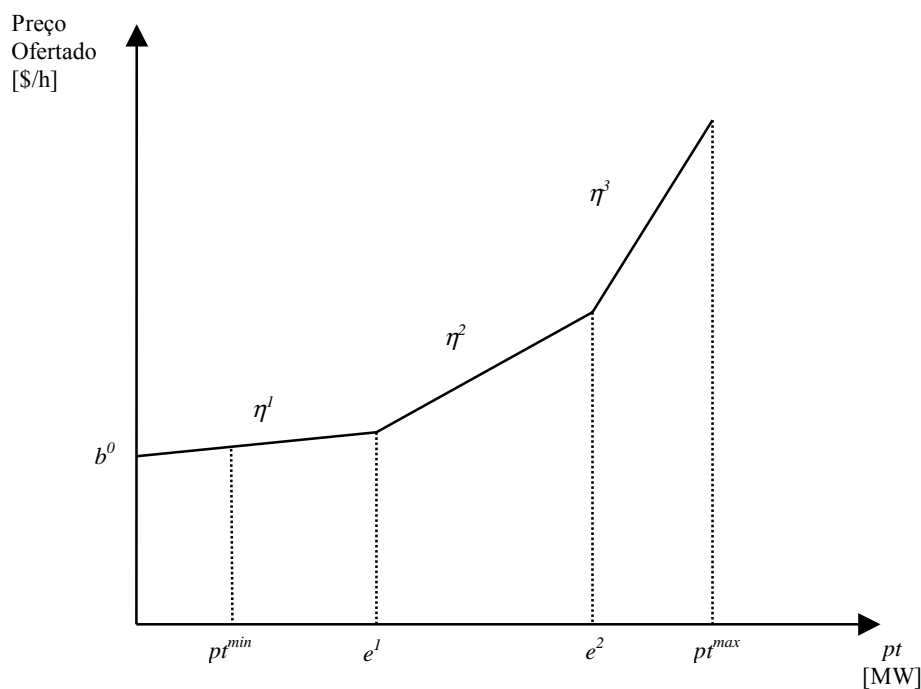


Figura 2.3 – Curva do Preço Ofertado para Unidade Termelétrica.

A curva da Figura 2.3 é definida por oito parâmetros informados pelos agentes geradores, onde: b^0 é preço para unidade operar a vazio; η^1 , η^2 e η^3 são os preços incrementais de geração; e^1 e e^2 são os pontos de inflexão da função, ou seja, o ponto onde existe mudança no preço incremental de geração.

² Expressão derivada da língua inglesa, que significa ofertar algo.

2.4 ALOCAÇÃO DE UNIDADES HIDRELÉTRICAS

No *unit commitment* hidrelétrico [7-18,26] – alocação de unidades hidrelétricas – a idéia central é mesma do caso termelétrico: quais as unidades hidrelétricas devem estar ligadas, para atender a carga e a reserva do sistema a cada estágio de tempo, com menor custo possível. Entretanto, a operação dos sistemas hidrelétricos difere em vários pontos dos sistemas termelétricos. Essas diferenças estão relacionadas às características individuais das unidades, bem como ao acoplamento entre as usinas hidrelétricas.

Diferentemente das unidades termelétricas, as unidades hidrelétricas não possuem características dinâmicas que influenciam no problema do *unit commitment*. Entretanto, de forma a se evitar o aumento dos custos de operação, pelo comportamento cíclico das unidades, devido aos sucessivos liga e desliga, as restrições de mínimos *uptime* e *downtime* [9,10] e o custo de partida [8,16] devem ser modeladas. Estes custos ainda não estão muito bem definidos para as unidades do sistema elétrico brasileiro. Porém, as freqüentes partidas podem ocasionar:

- (i) incremento da freqüência de intervenções para manutenção, a qual é proporcional ao número de partidas das unidades.
- (ii) excessivo desgaste e corrosão dos equipamentos mecânicos da turbina devido ao aumento de temperatura durante a partida;
- (iii) uso não eficiente da água durante a partida, pois a unidade irá operar longe do seu ponto ótimo, o que significa que a água está sendo mal utilizada.

Normalmente, as unidades hidrelétricas não possuem restrições de rampa, pois elas podem partir, desligar ou mudar sua potência nominal de operação rapidamente, ou pelo menos, num tempo inferior ao período de tempo (1 hora) considerado no *unit commitment*. Como exemplo, podemos citar uma unidade geradora da Usina de Salto Santiago que tem uma rampa máxima de tomada de carga equivalente a 210 MW/minuto e assim ela pode partir e atingir sua potência máxima (355 MW) em pouco menos de dois minutos, tempo este insignificante dentro do planejamento da operação de curto prazo. Com isto a solução do problema fica mais simples. Entretanto, o número de variáveis neste problema tende a ser maior, pois as usinas hidrelétricas são caracterizadas por terem uma grande quantidade de unidades geradoras, como por exemplo a UHE Ilha Solteira, situada no rio Paraná, com 20 unidades.

Outro ponto importante que deve ser considerado no problema do *unit commitment* é a presença de zonas proibidas de geração [7,9] para as unidades hidrelétricas. Estas zonas estão relacionadas às regiões nas quais as unidades não podem operar, devido a desgastes mecânicos, causados pela cavitação, vibrações e oscilações em sua potência de saída.

As zonas proibidas de geração impõem dificuldades adicionais de modelagem, devido ao aumento do número de estado possíveis para as unidades e o conseqüente aumento nas dimensões do problema. Para exemplificar, podemos apresentar uma curva ilustrativa da função de produção para uma unidade hidráulica onde a potência de saída, ph_j , está em função da vazão turbinada, q_j , conforme mostrada na Figura 2.4.

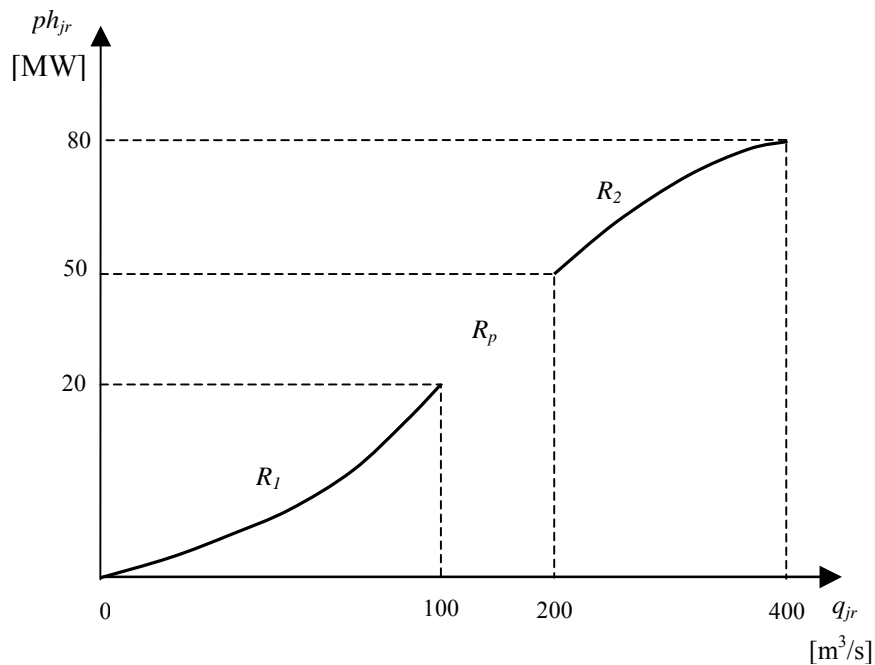


Figura 2.4 – Região Proibida de Geração – Exemplo Ilustrativo.

Nesta curva é representada uma região (zona) proibida de geração, R_p , onde a unidade não pode operar por longo tempo, ou seja, a unidade pode passar por esta região, mas não pode permanecer nela. As regiões R_1 , com limites de 0 a 20 MW, e R_2 , de 50 a 80 MW são regiões onde a unidade pode operar sem problemas. Desta forma, podemos considerar três possibilidades de operação para a unidade: ligada na região R_2 ; ligada na região R_1 ; e desligada.

A função de produção, que representa as unidades hidrelétricas no modelo do *unit commitment* deve ser suficientemente detalhada, dada a sua importância em problemas de planejamento da operação de curto prazo. Entretanto, antes de explorarmos a função de

produção, algumas considerações a respeito da operação dos sistemas hidrelétricos devem ser feitas.

2.4.1 Operação dos Sistemas Hidrelétricos

Assim como nos problemas de planejamento com horizonte de mais longo prazo, o aproveitamento dos recursos hidrelétricos deve ser representado no modelo do *unit commitment*. Este aproveitamento é representado por meio da equação de conservação da massa da água nos reservatórios que, sem considerar a infiltração e a evaporação do reservatório, pode ser escrita como sendo:

$$v_{rt}^f = v_{rt}^0 + y_{rt} - Q_{rt} - s_{rt} \quad (2.1)$$

onde:

t é o período de tempo considerado;

v_{rt}^f é o volume armazenado no reservatório r ao final do período t ;

v_{rt}^0 é o volume armazenado no reservatório r no início do período t ;

y_{rt} é a vazão afluyente natural no reservatório r durante o período t ;

Q_{rt} é a vazão turbinada média do reservatório r durante o período t ;

s_{rt} é a vazão vertida média do reservatório r durante o período t .

A Equação (2.1) relaciona o armazenamento e as vazões de entrada e saída do reservatório para uma única usina hidrelétrica. Assim, o volume no final do período t é igual ao volume inicial menos às vazões defluentes (turbinada e vertida), mais a vazão afluyente no reservatório. A operação dos reservatórios também está sujeita aos seus limites mínimo e máximo de armazenamento.

Além de respeitar o balanço dos reservatórios individualmente, as usinas hidrelétricas estão fisicamente acopladas umas às outras como mostra a Figura 2.5. Portanto, a operação de um reservatório depende da operação dos demais reservatórios a montante da sua cascata. Esta dependência pode ser expressa modificando-se a Equação (2.1), como mostrado a seguir:

$$v_{rt}^f = v_{rt}^0 - Q_{rt} - s_{rt} + \sum_{m \in R_+^{(r)}} (Q_{m,t-\tau_{mr}} + s_{m,t-\tau_{mr}}) + y_{rt} \quad (2.2)$$

onde:

$R_+^{(r)}$ é o conjunto de usinas imediatamente a montante do reservatório r ;

τ_{mt} é o tempo de viagem da água entre os reservatórios m e r ;

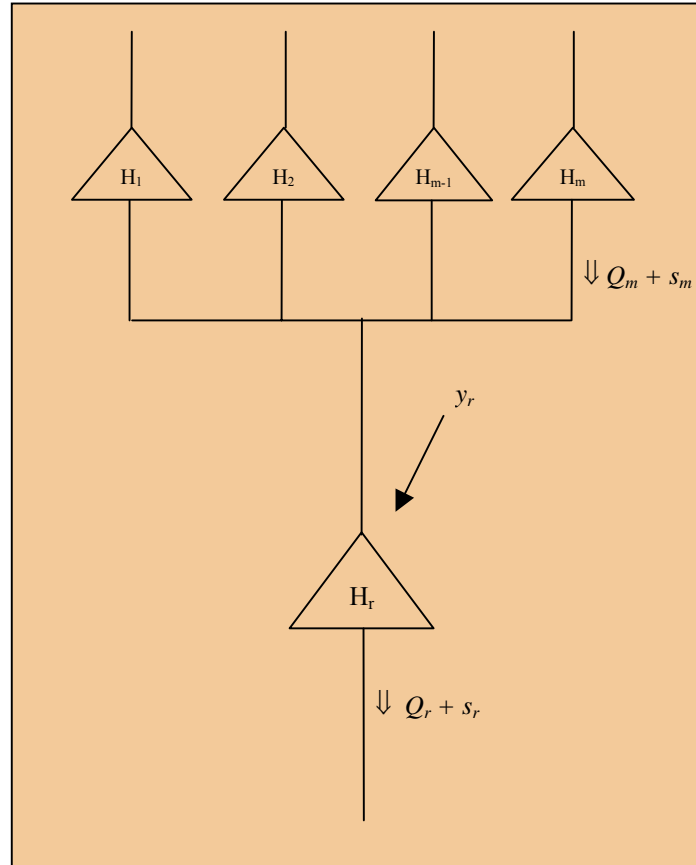


Figura 2.5 – Representação do Aproveitamento para Usinas Hidroelétricas.

Outra particularidade dos sistemas hidrelétricos é o seu custo indireto de operação, usualmente chamado de custo futuro da água, que expressa o valor da água nos reservatórios no final do horizonte de planejamento. Este custo é representado no problema do *unit commitment* por meio da função de custo futuro.

No sistema elétrico brasileiro a função de custo futuro é fornecida pelos estudos de mais longo prazo onde são consideradas as incertezas presentes nos sistemas hidrelétricos [1-6]. Desta forma, a função de custo futuro transmite ao problema do *unit commitment* hidráulico a evolução esperada do comportamento do custo de operação, o qual depende do uso da água no presente.

2.4.2 Função de Produção das Unidades de Geração Hidrelétrica

De forma simplificada, o processo de produção de energia elétrica pode ser visto como a transformação da energia potencial da água armazenada no reservatório em energia elétrica, por meio do conjunto turbina-gerador. Assim, esse processo pode ser descrito por:

$$E_{jr} = Ep_{jr} \times \eta t_{jr} \times \eta g_{jr} \quad (2.3)$$

onde:

E_{jr} é a energia produzida (saída) pelo j -ésimo gerador, do r -ésimo reservatório ao longo de um período t ;

Ep_{jr} é a energia potencial da massa d'água que é utilizada para acionar a turbina acoplada ao j -ésimo gerador, do r -ésimo reservatório durante o período t ;

ηt_{jr} é o rendimento médio da j -ésima turbina acoplada ao j -ésimo gerador, do r -ésimo reservatório ao longo de um período t ;

ηg_{jr} é o rendimento médio do j -ésimo gerador, do r -ésimo reservatório ao longo de um período t .

A energia potencial gravitacional é expressa por:

$$Ep_{jr} = (G \times q_{jr} \times hl_{jr})t \quad (2.4)$$

onde:

G é uma constante com valor de $9,81 \times 10^{-3}$, dada em $\text{Kg} \times \text{m}^2/\text{s}^4$, que está relacionada com a massa específica da água e a aceleração da gravidade;

q_{jr} é a vazão turbinada média pela j -ésima turbina, do r -ésimo reservatório durante o período t ;

hl_{jr} é a altura de queda líquida média que a j -ésima turbina, do r -ésimo reservatório está submetida durante o intervalo de tempo considerado t .

Assim, a energia elétrica produzida por uma unidade hidráulica pode ser reescrita como:

$$E_{jr} = (G \times q_{jr} \times hl_{jr} \times \eta t_{jr} \times \eta g_{jr})t \quad (2.5)$$

Sendo a potência definida como a energia gerada por unidade de tempo, ($P = dE/dt$), a potência produzida, ph_{jrt} , pelo j -ésimo gerador, durante o estágio de tempo t , em MW, é expressa por:

$$ph_{jrt}(\eta t_{jrt}, \eta g_{jrt}, q_{jrt}, hl_{jrt}) = G \times \eta t_{jrt} \times \eta g_{jrt} \times q_{jrt} \times hl_{jrt} \quad (2.6)$$

Entretanto, podemos substituir, na Expressão (2.6), os rendimentos da turbina e do gerador pelo rendimento da j -ésima unidade geradora, η_{jr} . E então reescrever a potência produzida como sendo:

$$ph_{jrt}(\eta_{jrt}, q_{jrt}, hl_{jrt}) = G \times \eta_{jrt} \times q_{jrt} \times hl_{jrt} \quad (2.7)$$

A seguir é apresentada a influência das variáveis, hl_{jr} , η_{jr} , q_{jr} na potência de saída de uma unidade geradora hidrelétrica.

2.4.2.1 Altura de Queda Líquida

Como visto no item anterior a potência de saída para j -ésima unidade geradora hidráulica depende da altura de queda líquida a que a unidade está submetida. A altura de queda líquida pode ser expressa pela diferença entre a cota a montante e a cota a jusante da usina, menos as perdas hidráulicas. Considerando uma única usina hidrelétrica, como na Equação (2.1), a altura de queda líquida pode ser expressa por:

$$hl_{jrt} = fcm(\underline{v}_{rt}) - fcj(Q_{rt} + s_{rt}) - p_{jrt}^h(Q_{rt}, q_{jrt}) \quad (2.8)$$

onde:

fcm é a função de cota de montante da usina durante o período t ;

fcj é a função de cota de jusante da usina durante o período t ;

p_{jr}^h é a perda hidráulica para a j -ésima unidade geradora, do r -ésimo reservatório durante o período de tempo t , em metros.

Entretanto, podemos definir altura de queda bruta da usina, na qual a unidade está situada, como sendo a diferença entre as cotas de montante e jusante. A Figura 2.6 mostra a relação das cotas da usina hidrelétrica.

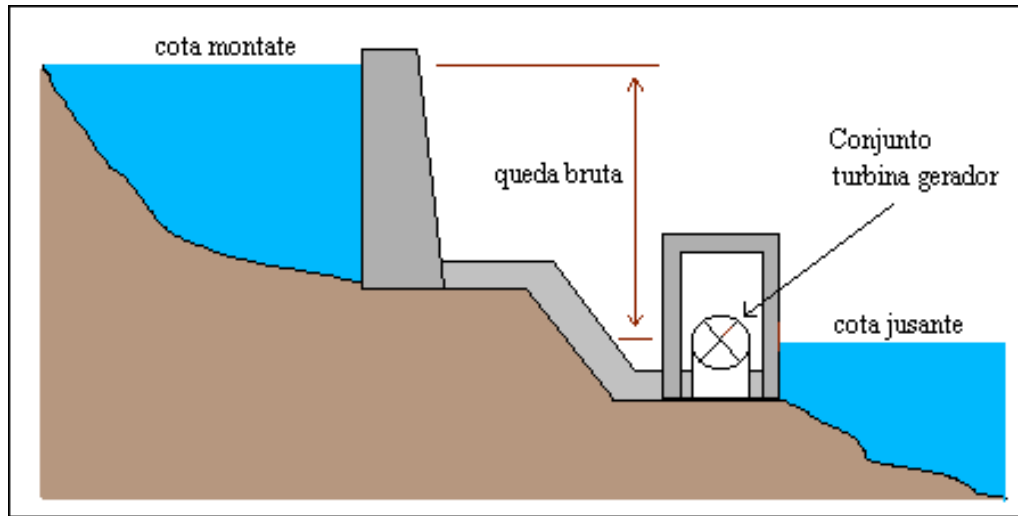


Figura 2.6 – Ilustração do Perfil de uma Usina Hidrelétrica.

A expressão da altura de queda bruta pode então ser escrita como sendo:

$$hb_{rt} = fcm(\underline{v}_{rt}) - fcj(Q_{rt} + s_{rt}) \quad (2.9)$$

A função de cota a montante expressa a relação entre a cota de montante da usina e o volume armazenado no reservatório r , ou seja, para um dado valor do volume do reservatório teremos uma cota de montante da usina. Em geral, a função de cota a montante é representada por um polinômio de quarta ordem. Para um volume médio \underline{v}_{rt} em hm^3 , o valor da cota a montante é dada por:

$$fcm = a_{0r} + a_{1r}\underline{v}_{rt} + a_{2r}\underline{v}_{rt}^2 + a_{3r}\underline{v}_{rt}^3 + a_{4r}\underline{v}_{rt}^4 \quad (2.10)$$

com,

$$\underline{v}_{rt} = \frac{(v_{rt}^0 + v_{rt}^f)}{2} \quad (2.11)$$

onde:

a_{0r}, \dots, a_{4r} são os coeficientes do polinômio que representa a cota de montante para o reservatório r .

A função de cota a jusante relaciona o valor da cota de jusante e a vazão defluente média, d_{rt} , da usina durante o período t , com:

$$d_{rt} = Q_{rt} + s_{rt} \quad (2.12)$$

Assim como a cota de montante, a cota de jusante das usinas do sistema brasileiro, em sua maioria, é representada de forma aproximada por um polinômio de quarta ordem, representado pela seguinte expressão:

$$fcj(d_{rt}) = b_{0r} + b_{1r}d_{rt} + b_{2r}d_{rt}^2 + b_{3r}d_{rt}^3 + b_{4r}d_{rt}^4 \quad (2.13)$$

onde:

b_{0r}, \dots, b_{4r} são os coeficientes do polinômio que representa a cota de jusante para o reservatório r .

Vale ressaltar que a dependência da potência de saída de uma unidade geradora hidráulica em relação a sua respectiva cota a jusante é verificada somente quando a mesma possui turbinas de reação, na qual o trabalho desenvolvido é obtido pela transformação de energia cinética e de pressão da água em energia elétrica. Esse tipo de turbina tem como característica operativa o funcionamento com o canal de fuga afogado e, portanto, a alteração do nível de jusante afeta diretamente a altura de queda líquida da unidade

As perdas hidráulicas, presentes na Expressão (2.8), surgem devido ao atrito da água durante o seu escoamento pelo conduto forçado. Essas perdas, em estudos de operação energética, podem ser aproximadas por uma expressão quadrática mostrada a seguir:

$$p_{jrt}^h = k_{usina} \times Q_{rt}^2 + k_{jr} \times q_{jrt}^2 \quad (2.14)$$

onde:

k_{usina} constante característica do conduto forçado da usina (comum a todas as unidades), dado em s^2/m^5 ;

k_{jr} é a constante característica do conduto forçado da j -ésima unidade geradora do r -ésimo reservatório (adutores individuais de cada unidade), expresso em s^2/m^5 .

Uma vez definido cada termo que compõe a expressão da altura de queda líquida, podemos reescrevê-la como:

$$hl_{jrt} = \left(a_{0r} + a_{1r}v_{rt} + a_{2r}v_{rt}^2 + a_{3r}v_{rt}^3 + a_{4r}v_{rt}^4 \right) + \left(b_{0r} + b_{1r}d_{rt} + b_{2r}d_{rt}^2 + b_{3r}d_{rt}^3 + b_{4r}d_{rt}^4 \right) - k_{usina} \times Q_{rt}^2 + k_{jr} \times q_{jrt}^2 \quad (2.15)$$

2.4.2.2 Rendimento da Unidade Geradora Hidráulica

O rendimento das unidades hidráulicas está relacionado com as perdas no processo de produção de energia elétrica. Estas perdas estão relacionadas com o ponto de operação que a turbina está submetido em um certo instante de tempo. Em geral, nos modelos de mais curto prazo, como o do *unit commitment*, o rendimento pode ser expresso por uma

função quadrática que relaciona as variáveis altura de queda líquida (hl_{jrt}) e vazão turbinada (q_{jrt}). Esta função é mostrada a seguir [7]:

$$\eta_{jrt}(hl_{jrt}, q_{jrt}) = \rho_{0jr} + \rho_{1jr}q_{jrt} + \rho_{2jr}hl_{jrt} + \rho_{3jr}hl_{jrt}q_{jrt} + \rho_{4jr}q_{jrt}^2 + \rho_{5jr}hl_{jrt}^2 \quad (2.16)$$

onde:

$\rho_{0jr}, \dots, \rho_{5jr}$ são coeficientes de eficiência da j -ésima unidade geradora.

Na Figura 2.7 é apresentada, de forma ilustrativa, a curva de desempenho para j -ésima unidade geradora, da qual o rendimento é obtido.

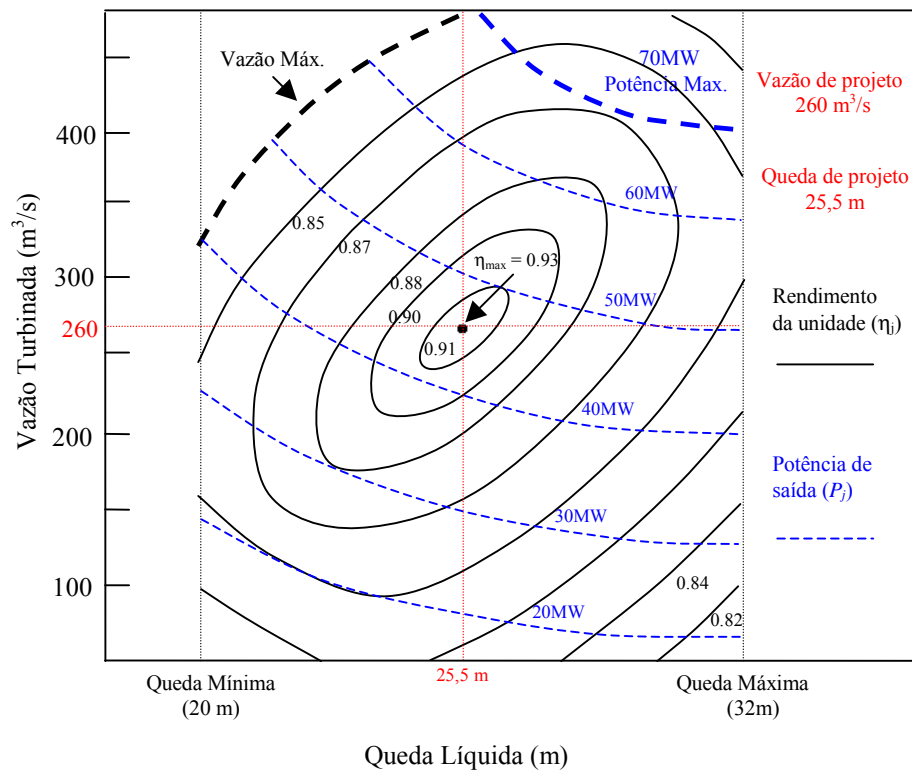


Figura 2.7 – Curva-Colina – Exemplo Ilustrativo.

Esta curva apresenta o inter-relacionamento das variáveis, hl_{jrt} , η_{jrt} , q_{jrt} envolvidas no processo de produção de energia elétrica. No eixo horizontal estão apresentados os valores altura de queda líquida. No eixo vertical estão os valores de vazão turbinada. Em forma de curvas de níveis aparecem os valores do rendimento da turbina. A potência fornecida, para os correspondentes valores de altura de queda líquida e vazão turbina, é representada pelo tracejado na Figura 2.7.

O ponto central na figura corresponde ao rendimento máximo da unidade (0,93), mesmo que não seja atinja sua máxima potência. Nesse ponto, a unidade geradora está

submetida à altura de queda líquida e a vazão turbinada nominais, correspondendo ao “ponto de projeto”. Qualquer outra combinação, de vazão turbinada e queda líquida, diferente do ponto de projeto corresponderá a um rendimento inferior ao valor máximo.

Por fim, podemos escrever a potência de saída de uma unidade hidrelétrica como função das variáveis de vazão turbinada na própria unidade q_{jrt} , vazão turbinada na usina Q_{rt} , vazão vertida da usina s_{rt} e volume médio do reservatório v_{rt} para um período de tempo t .

$$ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}, v_{rt}) = G \times \eta_{jrt}(q_{jrt}, hl_{jrt}) \times q_{jrt} \times hl_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}, v_{rt}) \quad (2.17)$$

2.4.3 Zonas Proibidas de Geração das Unidades Hidrelétricas

Como visto anteriormente, as unidades hidráulicas não podem operar em determinadas regiões por longo tempo, sob pena de comprometimento do seu funcionamento. Essas regiões (zonas) proibidas surgem do fenômeno da cavitação nas turbinas das unidades, quando as mesmas são submetidas a determinadas vazões e quedas de altura líquidas.

Além da cavitação, outros fatores restringem a operação de uma unidade de geração hidrelétrica. Esses fatores estão relacionados com regiões de operação nas quais a turbina pode sofrer fortes vibrações mecânicas, oscilações de pressão no tubo de sucção e oscilações no eixo. As duas principais consequências associadas a esses fenômenos são o comprometimento do funcionamento da turbina (devido ao excessivo desgaste mecânico) e oscilações da potência de saída do gerador. Geralmente, a representação das zonas onde a turbina não pode operar é feita sob a curva-colina das unidades, conforme é mostrado na Figura 2.8.

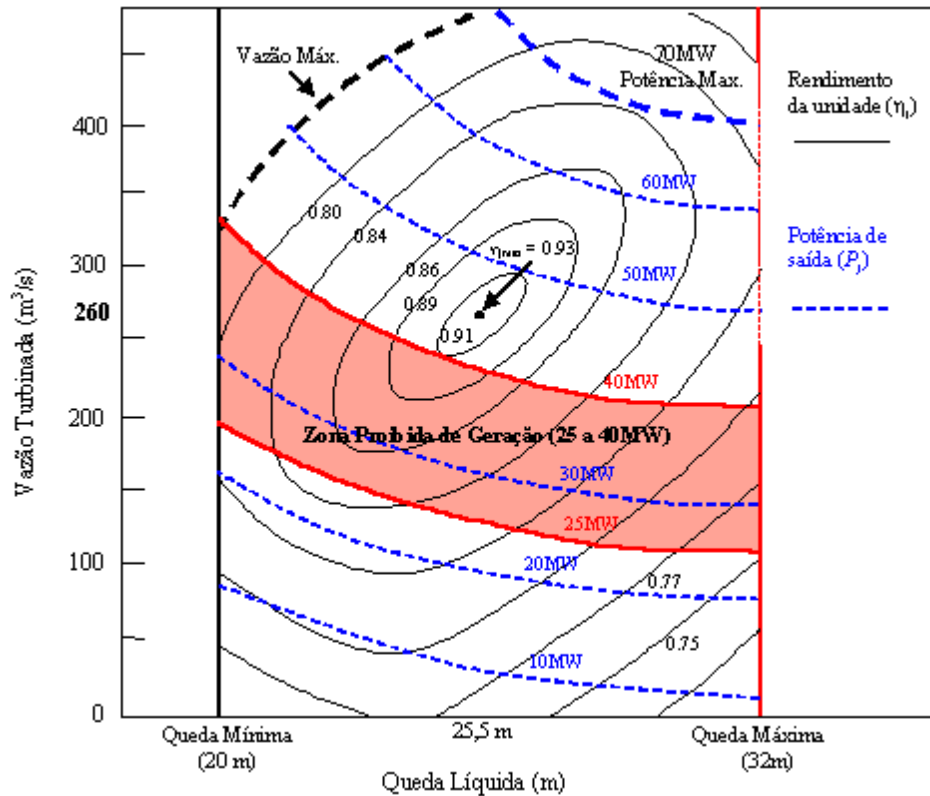


Figura 2.8 – Zonas Proibidas para a Unidade Hidráulica - Exemplo Ilustrativo.

2.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo é mostrada a necessidade de representar as unidades geradoras por meio de variáveis inteiras que definem o estado das unidades geradoras. Assim, se origina o problema do *unit commitment*, no qual se modelam as unidades geradoras individualmente.

São apresentadas as características de operação das unidades geradoras termelétricas e hidrelétricas, tais como, a restrição de rampa e de mínimo *uptime* e *downtime*, os custos de partida e as zonas proibidas de geração. Conforme visto, as unidades termelétricas são representadas no *unit commitment* por meio do custo crescente de produção de energia elétrica. Já as unidades hidrelétricas são representadas por suas respectivas funções não lineares de produção.

Embora os problemas do *unit commitment* termelétrico e hidrelétrico podem ser tratados separadamente sabe-se que os sistemas elétricos são compostos por unidades de ambas as matrizes energéticas. Desta forma, um modelo que representa o problema de pla-

nejamento da operação de curto prazo deve considerar as duas fontes de geração. A formulação para este problema é apresentada no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática do problema de planejamento da operação de curto prazo para sistemas hidrotérmicos, bem como o processo de decomposição que viabiliza a solução do mesmo, baseado na Relaxação Lagrangeana.

Inicialmente, são descritas as variáveis e restrições relacionadas com o sistema hidrotérmico e posteriormente tendo como base a teoria de Relaxação Lagrangeana, é mostrado o processo de decomposição do problema formulado, resultando em um subproblema de variáveis associadas às usinas termelétricas e outro de variáveis relacionadas com as unidades hidrelétricas. O subproblema hidrelétrico, por sua vez, é decomposto em um subproblema de variáveis contínuas e um conjunto de problemas contendo somente variáveis inteiras. Adicionalmente, é apresentado o caminho para solução dos subproblemas resultantes do processo de decomposição.

Por fim, é dada uma visão geral da solução do problema decomposto, considerando o processo de maximização da função dual, por meio da atualização dos multiplicadores de Lagrange.

3.2 SISTEMA HIDRELÉTRICO

Nesta seção são apresentadas as variáveis e restrições, envolvidas com as fontes de geração hidrelétrica, que se referem a modelagem dos rios, reservatórios e unidades geradoras no problema

3.2.1 *Restrição de Conservação da Água nos Reservatórios*

A operação dos diversos reservatórios em cascata dos rios que compõem uma bacia hidrográfica deve obedecer ao princípio de conservação da massa, ou seja, a diferença do volume de um reservatório em um estágio de tempo deve ser igual às vazões que afluem no reservatório, menos as vazões defluentes do mesmo.

Desconsiderando os efeitos da evaporação e da infiltração, esse princípio é representado no problema pela seguinte restrição:

$$v_{r,t+1} = v_{rt} - Q_{rt} - s_{rt} + \sum_{m \in R_+^{(r)}} (Q_{m,t-\tau_{mr}} + s_{m,t-\tau_{mr}}) + y_{rt} \quad r=1, R \quad t=1, T \quad (3.1)$$

onde:

t é o índice associado ao estágio de planejamento;

T é o número total de estágios de planejamento;

r é o índice do reservatório do sistema;

R é o número total de reservatórios do sistema;

v_{rt} é o volume armazenado no r -ésimo reservatório no início do estágio t ;

Q_{rt} é a vazão turbinada no r -ésimo reservatório ao longo do estágio t . Seu valor corresponde à soma das vazões turbinadas de todas as unidades que estão sendo utilizadas, durante o estágio t , em uma dada usina:

$$Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt} \quad r=1, R \quad t=1, T \quad (3.2)$$

onde:

j é o índice da unidade hidrelétrica que compõe a usina;

$J(r)$ é o número total de unidades hidrelétricas no r -ésimo reservatório, disponíveis para a operação;

q_{jrt} é a vazão turbinada na unidade hidrelétrica j , ($j \in J(r)$), durante o estágio t ;

s_{rt} é a vazão vertida no r -ésimo reservatório ao longo do estágio t ;

m é o índice dos reservatórios a montante do reservatório r ;

$R_+^{(r)}$ é o conjunto de reservatórios imediatamente a montante ao r -ésimo reservatório;

τ_{mr} é o tempo de viagem da água entre os reservatórios m e r ;

y_{rt} é a vazão afluente natural ao r -ésimo reservatório ao longo do estágio t .

3.2.2 Limites do Volume Armazenado e da Vazão Vertida nos Reservatórios

Essas restrições definem os limites de operação do volume armazenado e da vazão vertida para cada reservatório:

$$v_r^{min} \leq v_{r,t+1} \leq v_r^{max} \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.3)$$

$$s_{rt} \geq 0 \quad (3.4)$$

onde:

v_r^{min} é o volume mínimo do r -ésimo reservatório;

v_r^{max} é o volume máximo do r -ésimo reservatório.

3.2.3 Limites de Potência das Zonas Permitidas de Geração

Essa classe de restrições define os limites de potência para cada unidade hidrelétrica, bem como os limites das zonas permitidas de geração:

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{min} w_{jkrt} \leq ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}, v_{rt}) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{max} w_{jkrt} \quad \begin{matrix} j = 1, J(r) \\ r = 1, R \\ t = 1, T \end{matrix} \quad (3.5)$$

onde:

k é o índice associado às zonas operativas permitidas das unidades hidrelétricas;

$ph_{jrt}(\cdot)$ é a potência de saída da j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), durante o estágio t ;

ph_{jkr}^{min} é a potência mínima de saída associada a j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), durante o estágio t , quando a mesma estiver operando em sua k -ésima zona de geração permitida;

ph_{jkr}^{max} é a potência máxima de saída associada a j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), durante o estágio t , quando a mesma estiver operando em sua k -ésima zona de geração permitida;

Φ_{jr} é o conjunto de zonas permitidas de geração da j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$);

w_{jkrt} é uma variável inteira de decisão que indica se a j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), está operando ($w_{jkrt}=1$) ou não ($w_{jkrt}=0$) na k -ésima zona

permitida de geração, durante o estágio t . Como as unidade devem estar operando em apenas uma das zonas, a cada estágio de tempo t , devemos adicionar a seguinte restrição:

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} w_{jkrt} \leq 1 \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.6)$$

Além de estar operando nas zonas permitidas de geração (ligada), a unidade pode ainda estar desligada, ou seja, não estará operando em nenhuma das k -ésimas zonas permitidas e nesta situação teremos:

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} w_{jkrt} = 0 \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.7)$$

Desta forma é conveniente definir uma nova variável inteira de decisão, z_{jrt} , que indica se a j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), está ligada ($z_{jrt}=1$) ou desligada ($z_{jrt} = 0$) durante o estágio t . E, então se escreve:

$$z_{jrt} = \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} w_{jkrt} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.8)$$

3.2.4 Mínimos Uptime e Downtime das Unidades Hidrelétricas

Essas restrições têm por objetivo evitar que as unidades hidrelétricas sejam ligadas e desligadas freqüentemente ao longo do horizonte de planejamento, e podem ser escritas da seguinte maneira:

$$z_{jrt} = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x_{jrt} < t_{jr}^{up} \\ 0 & \text{se } -1 \geq x_{jrt} > -t_{jr}^{down} \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{fora isso} \end{cases} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.9)$$

onde:

t_{jr}^{up} é o número mínimo de estágios na qual a j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), deve permanecer ligada após a mesma ter entrado em operação;

t_{jr}^{down} é o número mínimo de estágios na qual a j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), deve permanecer desligada após a mesma ter sido retirada de operação;

x_{jrt} é uma variável de estado (inteira) que indica o estado da j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), no estágio t , isto é, representa o número de estágios que a unidade está ligada ($x_{jrt} > 0$) ou desligada ($x_{jrt} < 0$). O valor de x_{jrt} pode ser calculado pela seguinte equação de transição de estados:

$$x_{jrt} = \begin{cases} \text{máximo}(x_{jr,t-1}, 0) + 1, & \text{se } z_{jrt} = 1, \\ \text{mínimo}(x_{jr,t-1}, 0) - 1, & \text{se } z_{jrt} = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} j = 1, J(r) \\ r = 1, R \\ t = 1, T \end{matrix} \quad (3.10)$$

Podemos ilustrar a equação de transição de estados, representada por (3.10), mostrando a seguinte figura.

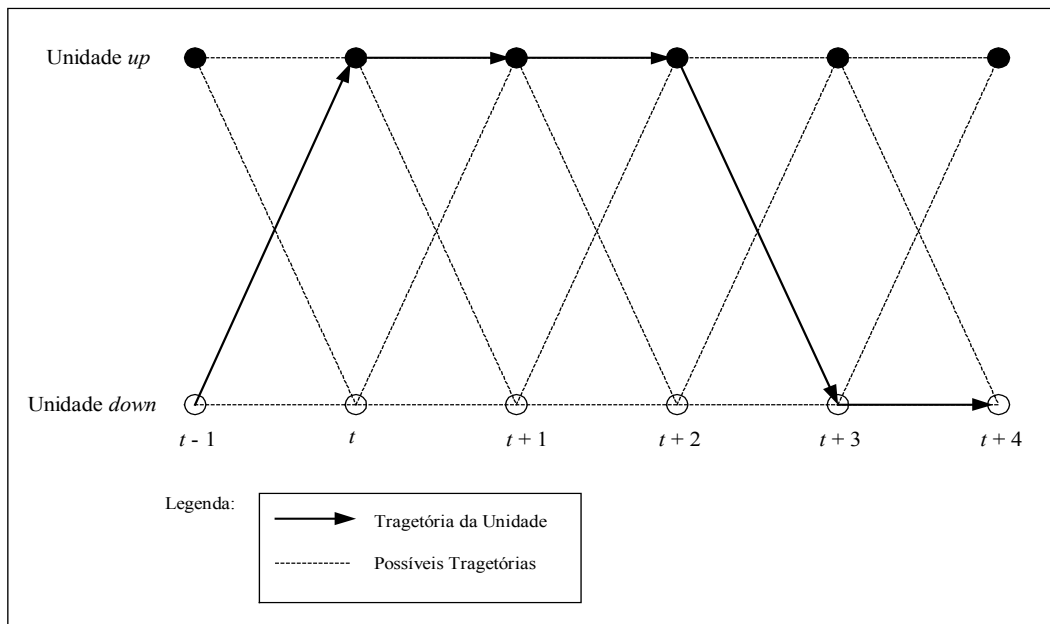


Figura 3.1 – Ilustração de Transição de Estados Para Uma Unidade Geradora.

Inicialmente, em $t - 1$ a unidade está desligada com $z_{jr,t-1} = 0$ e $x_{jr,t-1} = 0$. No estágio seguinte, t , a unidade é colocada em operação ($z_{jrt} = 1$), desta forma, podemos calcular a variável de estado como $x_{jrt} = \text{máximo}(0, 0) + 1 = 1$. Nos dois estágios subsequentes em que a unidade permanece ligada, $t + 1$ e $t + 2$, tem-se, respectivamente, $x_{jr,t+1} = \text{máximo}(1, 0) + 1 = 2$ e $x_{jr,t+2} = \text{máximo}(2, 0) + 1 = 3$. No estágio $t + 3$ a unidade é retirada de operação ($z_{jr,t+3} = 0$) e a variável de estado é calculada como sendo,

$x_{jr,t+3} = \text{mínimo}(3, 0) - 1 = -1$ em seguida a unidade permanece desligada onde,
 $x_{jr,t+4} = \text{mínimo}(-1, 0) - 1 = -2$.

Cabe observar que a Expressão (3.10) funciona como “memória” do comportamento de transições de estados da unidade hidrelétrica sendo utilizada pela Restrição (3.9).

3.2.5 Condições Iniciais

$$z_{jr0} = \tilde{z}_{jr0} \quad x_{jr0} = \tilde{x}_{jr0} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad (3.11)$$

onde:

\tilde{z}_{jr0} é uma variável binária que indica se a j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), estava ligada ou desligada durante o estágio $t=0$;

\tilde{x}_{jr0} é uma variável inteira que indica o número de períodos na qual a j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), estava ligada ou desligada até atingir o estágio $t=0$.

3.2.6 Custo de Partida das Unidades Hidrelétricas

O custo de partida de uma unidade hidrelétrica pode ser descrito, matematicamente, pela seguinte função:

$$sch_{jrt} = sch_{jr} z_{jrt} (1 - z_{jr,t-1}) \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.12)$$

onde:

sch_{jrt} é o custo de partida associado a j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$), durante o estágio t ;

sch_{jr} é o custo associado à partida da j -ésima unidade hidrelétrica, ($j \in J(r)$).

O custo de partida para as unidades hidrelétricas, apesar de formulado, não é considerado em nossas simulações ($sch_{jr} = 0$ com $j \in J(r)$, $r \in R$), uma vez que a definição desse valor seja de difícil estimativa.

Num mercado de energia elétrica em que os geradores fazem ofertas de preços, o custo de partida poderia ser uma informação a ser prestada, pelo agente gerador, ao operador do sistema que a utilizaria na definição do *unit commitment* e, desta maneira, a sua modelagem é relevante.

3.2.7 Função de Custo Futuro

A função de custo futuro permite comparar o custo de utilização da água armazenada nos reservatórios, ao longo do horizonte de planejamento da operação de curto prazo, com o custo de manter essa água armazenada. Para o sistema eletro-energético brasileiro esta função é fornecida pelo modelo de planejamento de mais longo prazo e representada por uma função linear por partes, sendo que os detalhes sobre a construção dessa função podem ser vistos em [1-6].

No modelo de *unit commitment*, a função de custo futuro é acoplada no final do período de estudo e escrita como:

$$\begin{aligned} \alpha + \sum_{r=1}^R \pi_r^{(1)} v_{r,T+1} &\geq C_{total}^{(1)} \\ \alpha + \sum_{r=1}^R \pi_r^{(2)} v_{r,T+1} &\geq C_{total}^{(2)} \\ &\vdots \\ \alpha + \sum_{r=1}^R \pi_r^{(p)} v_{r,T+1} &\geq C_{total}^{(p)} \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde:

α é uma variável não-negativa que representa o custo total esperado de operação do final do horizonte de planejamento até o início do horizonte avaliado;

$v_{r,T+1}$ é o volume armazenado no r -ésimo reservatório no final do horizonte de planejamento;

p é o índice do segmento linear que constitui a função de custo futuro, determinada a partir do modelo de planejamento energético de mais longo prazo na construção dos Cortes de Benders [1-6];

$\pi_r^{(p)}$ é uma constante associada ao r -ésimo reservatório e ao p -ésimo segmento linear da função de custo futuro obtida pelo problema de mais longo prazo na construção dos Cortes de Benders [1-6];

$C_{total}^{(p)}$ é uma constante associada ao p -ésimo segmento linear da função de custo futuro obtida pelo problema de mais longo prazo na construção dos Cortes de Benders [1-6].

3.3 SISTEMA TERMELÉTRICO

Neste trabalho, a representação das unidades termelétricas é feita de forma simplificada, desconsiderando o *unit commitment* para essas unidades. Essas simplificações não comprometem os objetivos pretendidos, que no caso se concentram na solução do problema relativo ao sistema hidrelétrico. Além disso, o *unit commitment* termelétrico tem sido muito bem explorado em trabalhos como [20,24], onde são consideradas as características dinâmicas das unidades termelétricas, como as apresentadas no Capítulo 2.

A seguir, é apresentada a restrição de limites de potência para a unidade termelétrica e o modelo matemático da função custo para a mesma.

3.3.1 Limites de Potência das Unidades Geradoras

$$pt_i^{\min} \leq pt_{it} \leq pt_i^{\max} \quad i = 1, I \quad t = 1, T \quad (3.14)$$

3.3.2 Custo Operativo das Usinas Termelétricas

$$CT = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I [C_i(pt_{it})] \quad (3.15)$$

onde:

CT representa o custo operativo total das usinas termelétricas no período de planejamento;

$C_i(pt_{it})$ é o custo de combustível da i -ésima termelétrica durante o estágio t . Esse custo é comumente modelado por uma função quadrática convexa, como função do nível de geração da termelétrica:

$$C_i(pt_{it}) = a_{i0} + a_{i1}pt_{it} + a_{i2}pt_{it}^2 \quad (3.16)$$

onde a_{i0} , a_{i1} e a_{i2} são constantes relacionadas com a produção de energia pela unidade.

3.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de planejamento da operação de curto prazo para sistemas hidrotérmicos pode ser formulado como um problema de programação inteira-mista [7,26]. A seguir, é apresentada a formulação matemática para esse problema:

$$\min_{pt, ph(\cdot), z, w, x, \alpha} P_{HT}, \text{ com} \quad (3.17)$$

$$P_{HT} = \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i=1}^I C_i(pt_{it}) + \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} sch_{jr} z_{jrt} (1 - z_{jrt-1}) \right] + \alpha$$

sujeito a:

$$\sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(\cdot) + \sum_{i=1}^I pt_{it} = D_t \quad t = 1, T \quad (3.18)$$

$$\sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} (ph_{jr}^{\max} z_{jrt} - ph_{jrt}(\cdot)) + \sum_{i=1}^I (pt_i^{\max} - pt_{it}) \geq R_t \quad t = 1, T \quad (3.19)$$

$$pt_i^{\min} \leq pt_{it} \leq pt_i^{\max} \quad i = 1, I \quad t = 1, T \quad (3.20)$$

$$v_{r,t+1} = v_{rt} - Q_{rt} - s_{rt} + \sum_{m \in R_+^{(r)}} (Q_{m,t-\tau_{mr}} + s_{m,t-\tau_{mr}}) + y_{rt} \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.21)$$

$$v_r^{\min} \leq v_{r,t+1} \leq v_r^{\max} \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.22)$$

$$s_{rt} \geq 0 \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.23)$$

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkrt}^{\min} w_{jkrt} \leq ph_{jrt}(\cdot) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkrt}^{\max} w_{jkrt} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.24)$$

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} w_{jkrt} \leq 1 \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.25)$$

$$z_{jrt} = \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} w_{jkrt} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.26)$$

$$z_{jrt} = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x_{jrt} < t_{jr}^{up} \\ 0 & \text{se } -1 \geq x_{jrt} > -t_{jr}^{down} \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{fora isso} \end{cases} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.27)$$

$$x_{jrt} = \begin{cases} \text{máximo}(x_{jr,t-1}, 0) + 1, & \text{se } z_{jrt} = 1, \\ \text{mínimo}(x_{jr,t-1}, 0) - 1, & \text{se } z_{jrt} = 0. \end{cases} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.28)$$

$$z_{jr0} = \tilde{z}_{jr0} \quad x_{jr0} = \tilde{x}_{jr0} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad (3.29)$$

$$\alpha + \sum_{r=1}^R \pi_r^{(p)} v_{r,T+1} \geq C_{total}^{(p)} \quad p = 1, \dots, P \quad (3.30)$$

As Restrições (3.18) e (3.19) referem-se, respectivamente, ao atendimento a demanda (D_t) e requisito de reserva (R_t) do sistema durante o estágio t . Também na Restrição (3.19), ph_{jr}^{\max} representa a potência máxima que a unidade hidrelétrica pode produzir durante o estágio t . Deve-se ressaltar que, na formulação apresentada, não foram consideradas as restrições relacionadas ao sistema de transmissão, como também todas restrições normalmente relacionadas ao *unit commitment* termelétrico.

3.5 RELAXAÇÃO LAGRANGEANA

A obtenção da solução do problema de planejamento da operação de curto prazo formulado anteriormente não é tarefa fácil. A presença de variáveis inteiras faz com que o problema seja inteiro-misto e, portanto, não-convexo. Assim, somente soluções sub-ótimas podem ser obtidas. Adicionalmente a essa característica, a não-linearidade e o grande porte do problema sugere que se utilize técnicas de decomposição em sua solução, tais como a Relaxação Lagrangeana, mediante a qual se espera que o problema dual resultante seja resolvido eficientemente.

A idéia fundamental da Relaxação Lagrangeana consiste em incorporar determinadas restrições, que acoplam as variáveis de natureza distintas, à função objetivo do problema, associando a cada restrição relaxada um multiplicador de Lagrange.

A Relaxação Lagrangeana apresenta a possibilidade de se resolver subproblemas de menor complexidade e com número reduzido de variáveis em comparação ao problema original, simplificando a solução do problema. Outras vantagens em se resolver o problema decomposto é que o problema dual resultante é côncavo e irrestrito [28].

Entretanto, faz parte do processo de solução do problema decomposto a maximização da função dual, que deve ser obtida de forma eficaz para que a decomposição apresente vantagem em sua aplicação.

Adicionalmente à maximização da função dual, outra etapa necessária para obtenção da solução do problema é a recuperação da solução primal [24,40]. Essas duas etapas do processo de resolução do problema dual são exploradas nos capítulos seguintes.

A seguir é mostrada a decomposição do problema em questão, utilizando a Relaxação Lagrangeana.

3.5.1 Relaxação das Restrições de Demanda e Reserva

Na formulação da Seção 3.4, devido à presença simultânea das variáveis termelétricas e hidrelétricas nas restrições de Demanda (3.18) e de Reserva (3.19), o sistema é totalmente acoplado. Assim, o objetivo é relaxar tais restrições para que se obtenha dois subproblemas distintos, um termelétrico e outro hidrelétrico, que possam ser resolvidos separadamente. Como resultado dessa relaxação, a seguir é apresentado o problema dual hidrotérmico correspondente, onde λ_t e μ_t são os multiplicadores de Lagrange associados, respectivamente, às restrições de atendimento a demanda e reserva, durante o estágio t :

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda_t, \mu_t} \Theta_{HT}(\lambda_t, \mu_t), \text{ com} \\ & \Theta_{HT}(\lambda_t, \mu_t) = \min_{\{pt_{it}, ph_{jrt}(\cdot), z_{jrt}, w_{jrt}, x_{jrt}, \alpha\}} \sum_t \left[\sum_{i=1}^I C_i(pt_{it}) + \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} sch_{jr} z_{jrt} (1 - z_{jr,t-1}) \right] + \alpha + \\ & \sum_{t=1}^T \lambda_t \left[- \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(\cdot) - \sum_{i=1}^I pt_{it} + D_t \right] + \sum_{t=1}^T \mu_t \left[\sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} (-ph_{jr}^{\max} z_{jrt} + ph_{jrt}(\cdot)) + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^I (-pt_i^{\max} + pt_{it}) + R_t \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

sujeito a: (3.20) – (3.30).

A função dual Θ_{HT} do problema acima pode ser rearranjada da seguinte maneira:

$$\Theta_{HT}(\lambda_t, \mu_t) = SP_H(\lambda_t, \mu_t) + SP_T(\lambda_t, \mu_t) + \sum_{t=1}^T (\lambda_t D_t + \mu_t R_t) \quad (3.32)$$

onde:

$$\begin{aligned} SP_H(\lambda_t, \mu_t) = & \min_{\{ph_{jrt}(\cdot), z_{jrt}, w_{jrt}, x_{jrt}, \alpha\}} \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} \left[sch_{jr} z_{jrt} (1 - z_{jr,t-1}) - \lambda_t ph_{jrt}(\cdot) + \right. \right. \\ & \left. \left. \mu_t (ph_{jrt}(\cdot) - ph_{jr}^{\max} z_{jrt}) \right] \right\} + \alpha \end{aligned} \quad (3.33)$$

sujeito a: (3.21) – (3.30)

$$SP_T(\lambda_t, \mu_t) = \min_{pt_{it}} \sum_t^T \left\{ \sum_{i=1}^I [C_{it}(pt_{it}) - \lambda_t pt_{it} + \mu_t (pt_{it} - pt_i^{\max})] \right\} \quad (3.34)$$

sujeito a: (3.20)

Para um valor fixo de λ_t e μ_t , os subproblemas de minimização, hidrelétrico e termelétrico, resultantes da decomposição, representados, respectivamente, por (3.33) e (3.34), são resolvidos separadamente. Esses subproblemas também são chamados de subproblemas primais.

O processo iterativo de solução consiste na atualização de λ_t e μ_t , resolvendo-se os subproblemas primais, até a se obter a maximização da função dual, representada por (3.31), conforme mostrado na Figura 3.2.

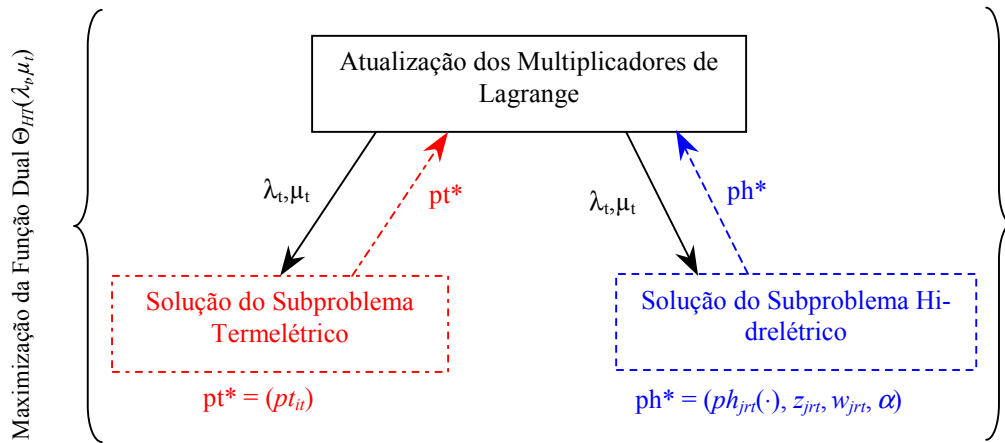


Figura 3.2 - Representação Esquemática da Solução do Problema Decomposto.

A atualização dos multiplicadores de Lagrange, λ_t e μ_t , é feita a partir de informações dos chamados subgradientes [28,29], relacionados às restrições da demanda e reserva, respectivamente, cuja metodologia de cálculo é mostrada no Capítulo 4.

Conforme foi visto no Capítulo 2, as unidades termelétricas são representadas, no modelo de planejamento da operação de curto prazo, por sua função de custo quadrática convexa, representada por (3.16). Desta forma, o Subproblema termelétrico (3.34), resultante da decomposição apresentada, pode ser resolvido por meio de um algoritmo de Programação Quadrática (PQ), definindo-se a cada estágio de tempo t , a geração de cada unidade termelétrica, para um dado valor de λ_t e de μ_t .

O subproblema hidrelétrico, representado por (3.33), não pode ser resolvido de forma tão simplificada quanto o termelétrico, devido à sua estrutura ser mais complexa. Na próxima seção é apresentado a solução desse problema.

3.5.2 Relaxação das Restrições de Limites das Zonas Permitidas de Geração

O Subproblema Hidrelétrico (3.33) é formulado como um problema de *unit commitment*, dada à necessidade de se tomar decisões de ligar ou desligar as unidades hidrelétricas durante o horizonte de planejamento e, desta forma, as unidades são representadas por variáveis inteiras. Associado a esse fato, a não-linearidade do modelo da função de produção das unidades geradoras e o acoplamento espacial e temporal devido à operação das diversas usinas hidrelétricas fazem com que a solução desse problema não seja uma tarefa simples. Assim, para sua solução propõe-se novamente o uso da Relaxação Lagrangeana.

A metodologia [9,10] apresentada nessa seção consiste em relaxar as restrições de limites de potência das zonas permitidas de geração das unidades hidrelétricas, representadas por (3.24), e, desta forma, decompor o subproblema hidrelétrico, representado por (3.33), em dois novos subproblemas: um subproblema representado pelas variáveis contínuas, que determina os níveis de geração das unidades, respeitando o acoplamento espacial e temporal do sistema hidrelétrico e o custo futuro da água; e um conjunto de subproblemas inteiros, cada um representando os custos de partida e as restrições de mínimos *uptime* e *downtime* de cada unidade individualmente, de forma a se obter as informações do estado de operação das unidades a cada estágio de tempo de planejamento.

Antes de relaxar as restrições de limites de potência das zonas permitidas das unidades, representadas por (3.24), é conveniente reescrevê-las da seguinte maneira:

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkrt}^{\min} w_{jkrt} - ph_{jrt}(\cdot) \leq 0 \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.35)$$

$$ph_{jrt}(\cdot) - \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkrt}^{\max} w_{jkrt} \leq 0 \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.36)$$

A Figura 3.3 mostra de maneira ilustrativa as restrições (3.35) e (3.36), aplicadas a j -ésima unidade geradora, com duas zonas permitidas de geração, considerando uma dada queda líquida constante. Adicionalmente, sabe-se que a unidade está gerando, a cada estágio de tempo t , em apenas uma das k -ésimas zonas permitidas, atendendo a Restrição (3.25).

Como por exemplo, quando $w_{j1rt}=1$, w_{j2rt} deve, necessariamente, ser igual a zero e, desta maneira, a unidade estará gerando na região mais inferior da curva, com os limites mínimo e máximo representados por ph_{j1r}^{min} e ph_{j1r}^{max} , respectivamente.

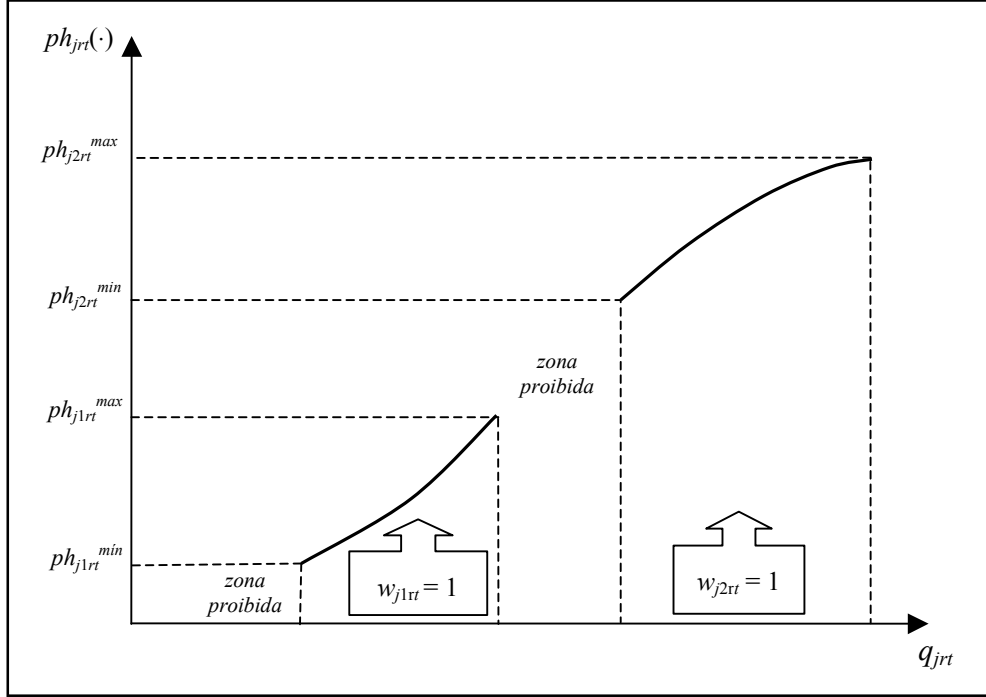


Figura 3.3 – Representação dos Limites de Potência das Faixas Operativas.

Relaxando-se as restrições de limites de potência das zonas permitidas das unidades hidrelétricas, o problema dual hidrelétrico, construído a partir de (3.33), é dado por:

$$\begin{aligned}
 \max_{\beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U} \Theta_H(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U), \text{ com} \\
 \Theta_H(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) = \min_{\{ph_{jrt}(\cdot), z_{jrt}, w_{jkrt}, x_{jrt}, \alpha\}} \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} \left[sch_{jr} z_{jrt} (1 - z_{jr,t-1}) - \lambda_t ph_{jrt}(\cdot) + \right. \right. \\
 \left. \left. \mu_t (ph_{jrt}(\cdot) - ph_{jr}^{max} z_{jrt}) \right] + \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} \beta_{jrt}^L \left[\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{min} w_{jkrt} - ph_{jrt} \right] + \right. \\
 \left. \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} \beta_{jrt}^U \left[ph_{jrt}(\cdot) - \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{max} w_{jkrt} \right] + \alpha \right\}
 \end{aligned} \quad (3.37)$$

sujeito a: (3.21) – (3.30), exceto (3.24).

Na expressão acima β_{jrt}^L e β_{jrt}^U são, nesta ordem, os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de mínima e máxima potência das zonas permitidas das unidades, e Θ_H é a função dual do problema.

A função do Problema dual (3.37) pode ser dividida em um subproblema contínuo, com respeito a $ph_{jrt}(\cdot)$ e as demais variáveis hidrelétricas contínuas, e um conjunto de subproblemas inteiros relacionados apenas com as respectivas variáveis inteiras z_{jrt} , w_{jkrt} e x_{jrt} , as quais representam os estados das unidades hidráulicas, da seguinte maneira:

$$\Theta_H(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) = SP_C(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) + SP_I(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) \quad (3.38)$$

O subproblema contínuo resultante da decomposição é formado pelo agrupamento das variáveis contínuas:

$$SP_C(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) = \min_{ph_{jrt}(\cdot), \alpha} \sum_t^T \left\{ \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} \left[(\mu_t - \lambda_t + \beta_{jrt}^U - \beta_{jrt}^L) ph_{jrt} \right] \right\} + \alpha \quad (3.39)$$

sujeito a: (3.21) – (3.23) e (3.30)

$$0 \leq ph_{jrt} \leq ph_{jrt}^{\max} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (3.40)$$

A restrição de limites de potência, representada por (3.40), é adicionada para manter a factibilidade do problema dentro de limites conhecidos das unidades geradoras e auxiliando a convergência durante a maximização da função dual.

Conhecidos os valores dos multiplicadores λ_t , μ_t , β_{jrt}^L e β_{jrt}^U o Subproblema contínuo (3.39) se caracteriza por ser de programação contínua, não-linear, não-convexo e de grande porte, tendo em vista o que foi apresentado até o momento.

Como é apresentado no Anexo A, a potência de saída das unidades é função quadrática somente da vazão turbinada na unidade. Assim, o Subproblema contínuo (3.39), pode ser resolvido como um problema de Programação Quadrática¹, acoplado no tempo e no espaço, obtendo-se como solução a variável de custo futuro, α , e para cada estágio de tempo t , as demais variáveis contínuas correspondentes a volume, vertimento, e potência de saída, relacionada à vazão turbinada, para λ_t , μ_t , β_{jrt}^L e β_{jrt}^U fixos. A potência de saída é relacionada diretamente com a vazão turbinada pela unidade.

O subproblema inteiro, composto pelas variáveis de origem inteira, pode ser escrito como:

¹ A Programação Quadrática refere-se a solução de problemas do tipo, minimize $0,5 \cdot x^T \cdot H \cdot x + f \cdot x$, sujeito as restrições lineares, onde, H é matriz hessiana, f é o vetor dos coeficientes lineares da função objetivo e x é vetor solução do problema.

$$SP_I(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) = \min_{z_{jrt}, w_{jkrt}, x_{jrt}} \sum_t^T \left\{ \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} \left[stc_{jr} z_{jrt} (1 - z_{jr,t-1}) - \mu_t ph_{jr}^{\max} z_{jrt} + \right. \right. \\ \left. \left. \beta_{jrt}^L \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\min} w_{jkrt} - \beta_{jrt}^U \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\max} w_{jkrt} \right] \right\} \quad (3.41)$$

sujeito a: (3.25) – (3.29)

A Figura 3.4 mostra um diagrama de transição de estado, para o Subproblema inteiro (3.44), para j -ésima unidade hidrelétrica com duas zonas permitidas de geração, considerando três estágios de tempo para restrição de mínimos *uptime* e *downtime*.

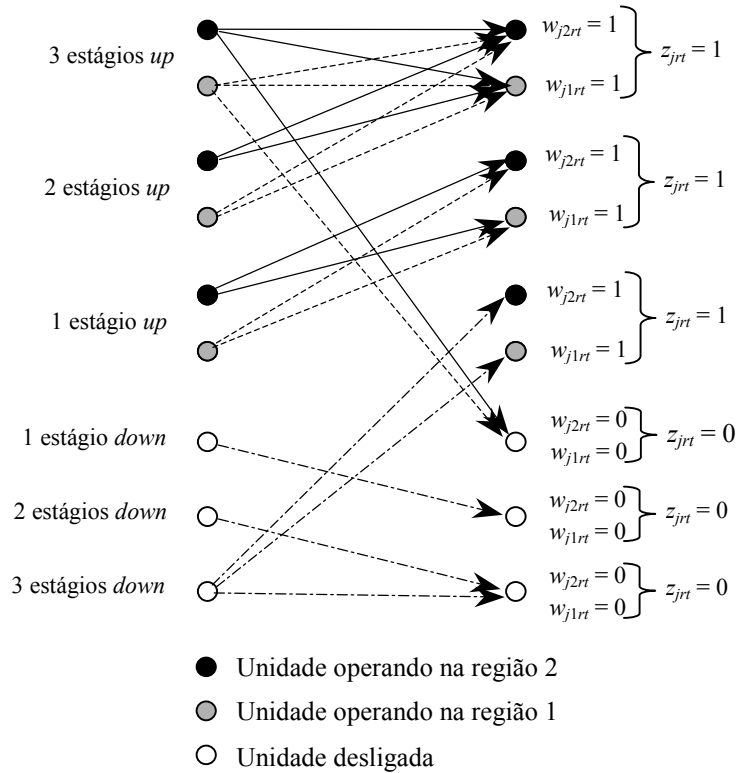


Figura 3.4 – Diagrama de Transição de Estado.

No diagrama apresentado na Figura 3.4, para um dado estágio t , o custo associado à unidade j ($j \in J(r)$, $r \in R$) que esteja operando em sua k -ésima zona permitida ($w_{jkrt} = 1$), é dado por:

$$stc_{jr} z_{jr,t} (1 - z_{jr,t-1}) - \mu_t ph_{jr}^{\max} z_{jr,t} + \beta_{jrt}^L \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\min} w_{jkrt} - \beta_{jrt}^U \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\max} w_{jkrt} \quad (3.42)$$

Baseado no diagrama de estados apresentado, para valores fixos de μ_t , β_{jrt}^L e β_{jrt}^U , a trajetória de mínimo custo do grafo, isto é, a sequência de estados ótima ao longo dos está-

gios de planejamento, para cada unidade hidrelétrica, pode ser obtida pelo uso de qualquer algoritmo de programação inteira, como por exemplo a Programação Dinâmica [19].

Esse subproblema é acoplado no tempo devido às restrições de mínimos *uptime* e *downtime* e ao custo de partida das unidades hidrelétricas, representados por (3.27) e (3.11), respectivamente.

Adicionalmente, esse o subproblema inteiro, representado por (3.41), pode ser acoplamento no espaço, isto é, o despacho de uma unidade interfere sobre as outras. Este fato ocorre pois o limite de potência para certas unidades pode não ser constante, conforme mostrado a seguir.

A Figura 3.5 apresenta de forma ilustrativa como acontece a variação do limite potência máxima para uma unidade hidrelétrica.

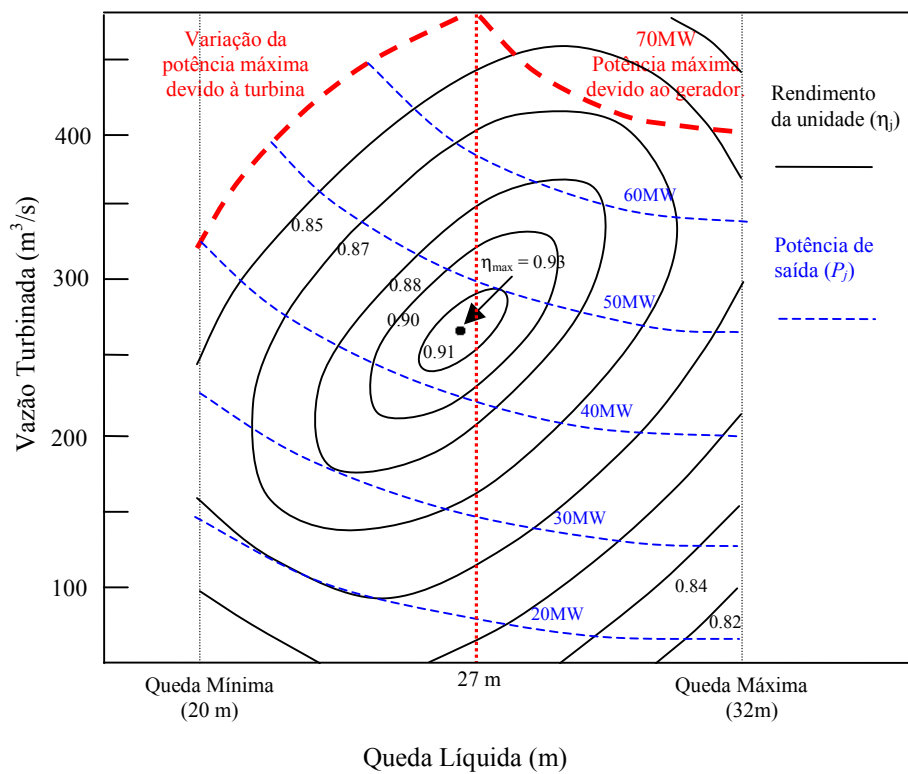


Figura 3.5 – Curva Colina – Ilustração do Limite de Potência.

Por meio da figura apresentada, quando a unidade está submetida a uma altura de queda líquida superior a 27m a potência máxima de saída da unidade é 70MW. Esse limite é imposto pelo gerador propriamente dito. Para quedas inferiores a 27m o limite de potência está associado ao limite de vazão da turbina, que passa a variar, acompanhando a redução da queda líquida. Desta maneira, verifica-se uma dependência da altura de queda líquida.

da sobre os limites de potência das unidades geradoras, sendo consequentemente dependentes da operação das demais unidades hidrelétricas do sistema, tornando o problema acoplado no espaço, o que inviabilizaria a aplicação da decomposição apresentada neste trabalho.

Para evitar esta dependência, os limites de potência das unidades hidrelétricas são definidos no início do horizonte de planejamento, baseado no volume do reservatório da usina, e considerados independentes da variação na queda líquida durante o restante dos estágios de tempo. Conforme já foi mencionado anteriormente, esta simplificação é aceitável considerando que o foco deste trabalho é a solução do problema dual.

Desta forma, podemos escrever um conjunto de subproblemas inteiros, onde cada subproblema está relacionado a uma única unidade hidrelétrica e pode ser resolvido separadamente, como sendo:

$$SP_I(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) = \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} spi_{jr} = \min_{z_{jrt}, w_{jkr}, x_{jrt}} \sum_t^T \left[sch_{jr} z_{jrt} (1 - z_{jr,t-1}) - \mu_t ph_{jr}^{\max} z_{jrt} + \beta_{jrt}^L \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\min} w_{jkr} - \beta_{jrt}^U \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\max} w_{jkr} \right] \quad (3.43)$$

sujeito a: (3.25) – (3.29)

A atualização dos multiplicadores de Lagrange, β_{jrt}^L e β_{jrt}^U , é feita com base nas informações dos subgradientes que representam os desbalanços das restrições de limites inferior e superior das zonas permitidas de geração, respectivamente, a partir dos valores ótimos encontrados na solução do Subproblema contínuo (3.39) e pelo conjunto de subproblemas inteiros, representado por (3.43).

Na figura a seguir é apresentada de forma esquemática a metodologia [10] de solução do problema dual do planejamento da operação de curto prazo.

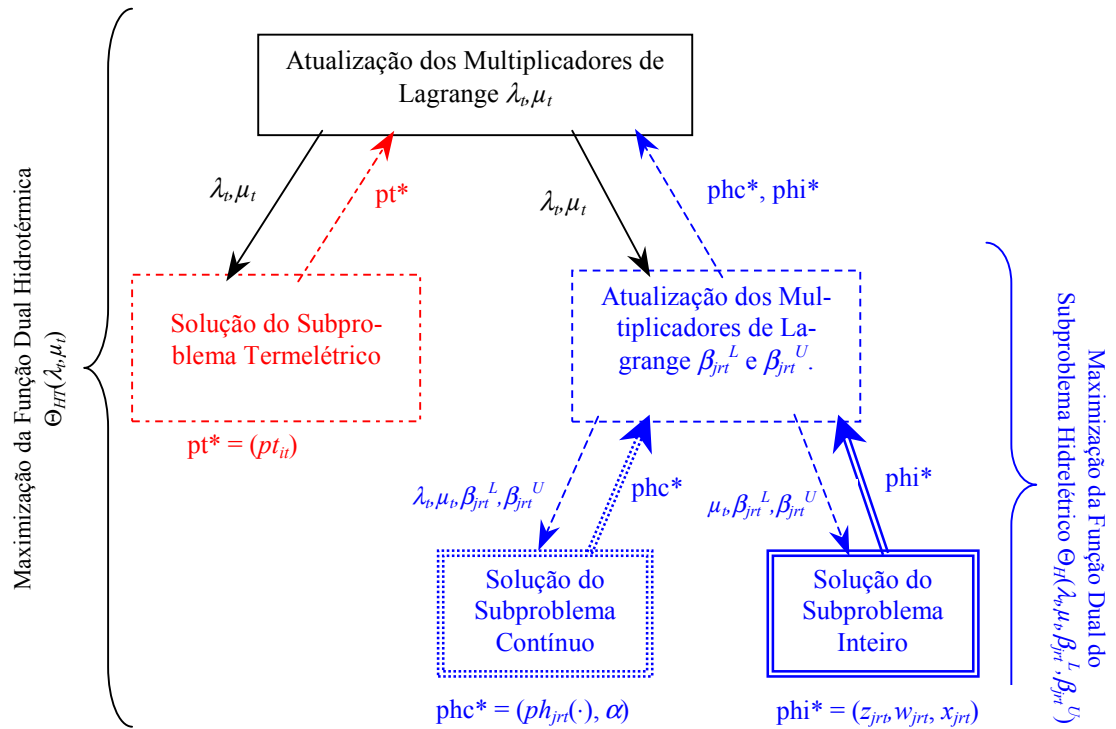


Figura 3.6 - Representação Esquemática da Solução do Problema Dual.

Sob o ponto de vista de implementação, podemos formular o problema dual de planejamento da operação de curto-prazo relaxando de uma só vez as restrições de demanda, de reserva e dos limites das zonas permitidas de geração representadas, respectivamente, por (3.18), (3.19) e (3.24). Desta maneira, constrói-se o problema dual como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U} \Theta_{HT}(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U), \text{ com} \\ & \Theta_{HT}(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) = \min_{\{p_{ti}, ph_{jrt}(\cdot), z_{jrt}, w_{jkr}, x_{jrt}, \alpha\}} \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i=1}^I C_i(p_{ti}) + \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} sch_{jr} z_{jrt} (1 - z_{jr,t-1}) \right] + \\ & \sum_{t=1}^T \lambda_t \left[-\sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(\cdot) - \sum_{i=1}^I p_{ti} + D_t \right] + \sum_{t=1}^T \mu_t \left[\sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} (-ph_{jr}^{\max} z_{jrt} + ph_{jrt}(\cdot)) + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^I (-p_{ti}^{\max} + p_{ti}) + R_t \right] + \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} \beta_{jrt}^L \left[\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\min} w_{jkr} - ph_{jrt}(\cdot) \right] + \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} \beta_{jrt}^U \left[ph_{jrt}(\cdot) - \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\max} w_{jkr} \right] + \alpha \end{aligned} \quad (3.44)$$

sujeito a: (3.20) a (3.23) e (3.25) a (3.30).

A função dual Θ_{HT} do Problema Dual (3.44), pode ser rearranjada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Theta_{HT}(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) = & SP_C(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) + SP_I(\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L, \beta_{jrt}^U) + \\ & + SP_T(\lambda_t, \mu_t) + \sum_{t=1}^T (\lambda_t D_t + \mu_t R_t) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Os subproblemas que constituem a função dual, representada por (3.45), seguem a mesma formulação e solução já apresentadas.

Na Figura 3.7 é mostrado o esquema de solução do problema dual, representado por (3.44), onde os todos multiplicadores do problema dual são atualizados ao mesmo tempo.

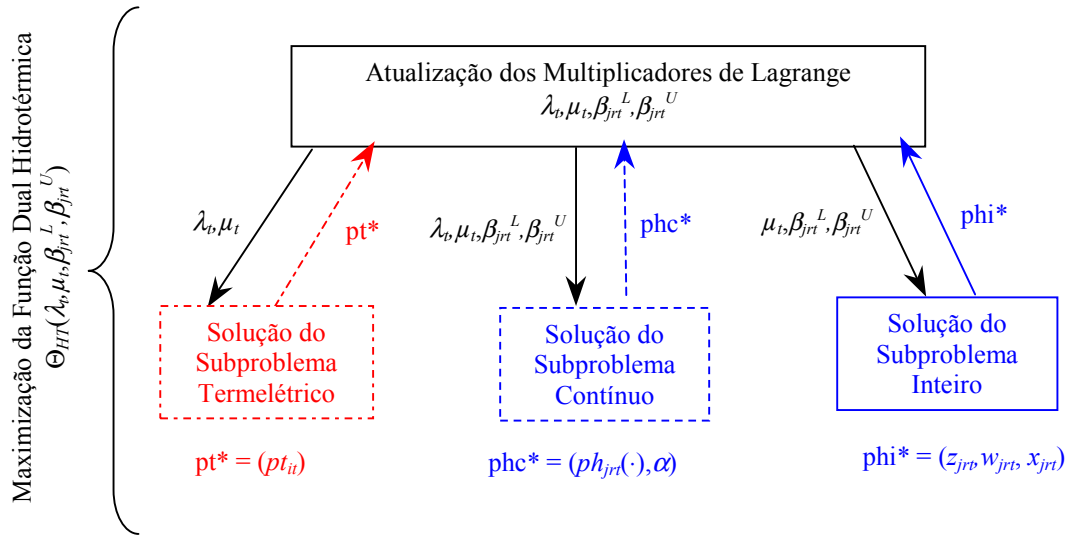


Figura 3.7 – Representação Esquemática da Solução do Problema Dual.

3.6 CONCLUSÕES

Neste capítulo é apresentada a modelagem do problema de planejamento da operação de curto prazo para sistemas hidrotérmicos e a metodologia de decomposição aplicada para a solução do problema, baseada na Relaxação Lagrangeana.

Com relação ao sistema hidrelétrico, o modelo apresentado leva em consideração o custo de partida, as restrições de mínimo *uptime* e *downtime*, bem como os limites de potência relacionados com as zonas permitidas de geração das unidades. A representação dessas características faz com que a modelagem das unidades hidrelétricas seja realista.

A representação detalhada das unidades hidrelétricas oferece uma maior eficiência no processo de produção de energia elétrica, uma vez que a obtenção do despacho e do comissionamento ótimo para as unidades evitam sobre-custos operativos.

O sistema termelétrico é representado por um modelo simplificado onde não é considerado o comissionamento das unidades termelétricas e, conseqüentemente, as características dinâmicas dessas unidades não são modeladas.

O nível de detalhamento apresentado na modelagem deste trabalho faz com que o problema tenha características não-convexa, não-linear e de grande porte. A primeira ocorre pois o problema é do tipo inteiro-misto devido à presença de variáveis inteiras que representam o estado das unidades hidrelétricas e a função de produção destas unidades. A não-linearidade é garantida também pela função de produção das unidades hidrelétricas e da função de custo das unidades termelétricas. O grande porte surge devido à grande quantidade de unidades presente nos sistemas hidrotérmicos.

A presença das características mencionadas torna o problema de solução complexa e, desta forma, sugerindo métodos de decomposição que possibilitem a resolução eficiente do problema.

Como visto neste capítulo, tendo por base a Relaxação Lagrangeana, o problema formulado inicialmente é decomposto em dois subproblemas independentes: um subproblema termelétrico e outro subproblema hidrelétrico. O subproblema termelétrico, que possui uma modelagem simplificada, pode ser resolvido por meio da programação quadrática.

Especial atenção é dada ao sistema hidrelétrico, que é decomposto em subproblema de variáveis contínuas e um conjunto de subproblemas de variáveis inteiras. A solução do subproblema contínuo é obtida por programação quadrática onde é determinada a potência de saída para as unidades hidrelétricas, o nível do reservatório, o vertimento e o custo futuro. O conjunto de subproblemas inteiros é resolvido a partir da determinação da trajetória de menor custo para o comissionamento das unidades hidrelétricas no horizonte de planejamento.

No capítulo seguinte são apresentados os métodos de solução do problema decomposto ou problema dual, que foi apresentado neste capítulo, bem como suas propriedades matemáticas.

CAPÍTULO 4

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DUAL

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a fundamentação matemática para a solução do problema dual, a qual passa pelo uso de métodos de otimização não-diferenciável.

Inicialmente, o problema dual é apresentado como um problema não-diferenciável, pois é originário de um problema primal inteiro-misto. Em seguida, são mostrados os métodos de otimização não-diferenciável aplicáveis na maximização da função dual, representados pelos métodos: do subgradiente, dos planos cortantes e de feixes. Neste trabalho, o método de feixes é detalhado, apresentando-se suas vantagens em relação aos outros métodos, portanto, sendo este o método selecionado para a solução do problema descrito neste trabalho.

4.2 PROPRIEDADES DO PROBLEMA DUAL

A seguir, é apresentado o desenvolvimento teórico a respeito da dualidade de problemas matemáticos [28-30]. Para tanto, considere o problema primal:

$$\underset{x}{\text{minimize}} \quad f(x) \tag{4.1}$$

$$\text{sujeito a:} \quad g(x) \leq 0$$

Com o seu respectivo problema dual definido por:

$$\underset{\mu}{\text{maximize}} \quad q(\mu) \tag{4.2}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \mu \geq 0$$

onde, a função dual $q(\mu)$, é escrita como sendo:

$$q(\mu) = \min_x L(x, \mu) = \min_x \{f(x) + \mu g(x)\} \tag{4.3}$$

e $L(x, \mu)$ é a função Lagrangeana do problema.

No problema acima $g(x)$ pode representar uma única restrição, ou um conjunto de restrições de desigualdade. Além dessas restrições, os problemas matemáticos podem conter restrições de igualdade, sendo os multiplicadores de Lagrange associados a estas restrições, quando as mesmas são relaxadas, considerados irrestritos em sinal, na solução do problema dual.

A solução do problema dual, representado por (4.2), consiste em se obter um μ^* ótimo, que maximiza a função dual, representada por (4.3). Esta solução corresponderá exatamente à solução do problema primal para os casos onde existe a garantia de convexidade. Para situações onde o problema primal não é convexo, como o caso do problema de *unit commitment* formulado no Capítulo 3, a solução dual pode não ser igual à obtida no problema primal e, então, podemos definir [28-30]:

$$q^*(\mu^*) = f^*(x^*), \text{ quando } f(x) \text{ for convexo.} \quad (4.4)$$

$$q^*(\mu^*) \leq f^*(x^*), \text{ quando } f(x) \text{ for não-convexo.} \quad (4.5)$$

onde,

$f^*(x^*)$ é a solução ótima do problema primal, representado por (4.1);

$q^*(\mu^*)$ é a solução ótima do problema dual, representado por (4.2).

Cabe ressaltar que, apesar do problema primal poder ser de origem não-convexa, a função dual do problema é, necessariamente, côncava [28].

Uma informação importante extraída da função dual é o chamado subgradiente $g(x_\mu)$, obtido a partir do diferencial da função, ou seja, $\partial q(\mu)/\partial \mu = g(x_\mu)$, que corresponde exatamente a restrição ou ao conjunto de restrições relaxadas do problema primal. Assim, o subgradiente é obtido sem custos adicionais, uma vez que, a variável primal x_μ que constitui o subgradiente, é resultante do problema de minimização da função dual calculada.

Conforme [24,28,29], o subgradiente pode ser definido da seguinte maneira: Dada uma função convexa f qualquer, pode se afirmar que um vetor $e \in \mathfrak{R}^n$ é um subgradiente de f no ponto $x \in \mathfrak{R}^n$ se:

$$f(z) \geq f(x) + (z - x)^T e \quad \text{para qualquer } z \in \mathfrak{R}^n \quad (4.6)$$

ou no caso de função côncava:

$$f(z) \leq f(x) + (z - x)^T e \quad \text{para qualquer } z \in \mathfrak{R}^n \quad (4.7)$$

Para ilustrar a assertiva contida em (4.5), o seguinte problema de programação inteira [39], representado em sua forma primal pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} \quad f(x) = -x \\ & \text{sujeito a:} \quad g(x) = x - 1/2 \leq 0 \\ & \quad \quad \quad x \in X = \{0 \text{ ou } 1\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Relaxando a restrição $g(x)$ e associando um respectivo multiplicador de Lagrange μ , a função dual construída a partir do Problema Primal (4.6), fica:

$$q(\mu) = \min_{x \in \{0 \text{ ou } 1\}} \{-x + \mu(x - 1/2)\} = \min_{x \in \{0 \text{ ou } 1\}} \{(-1 + \mu)x - \mu/2\} \quad (4.9)$$

A função dual, representada por (4.7), pode ser expressa, numericamente, da seguinte forma: quando $0 \leq \mu \leq 1$ a solução ótima do problema de minimização, representado por (4.7), é para $x^* = 1$, e quando $\mu \geq 1$ a solução ótima do referido problema é com $x^* = 0$.

Assim, podemos reescrever a função dual, representada por (4.7), como sendo:

$$q(\mu) = \begin{cases} -\mu/2, & \text{se } \mu > 1 \\ \mu/2 - 1, & \text{se } \mu \leq 1 \end{cases} \quad (4.10)$$

A Figura 4.1 mostra o gráfico da função dual, representada por (4.8).

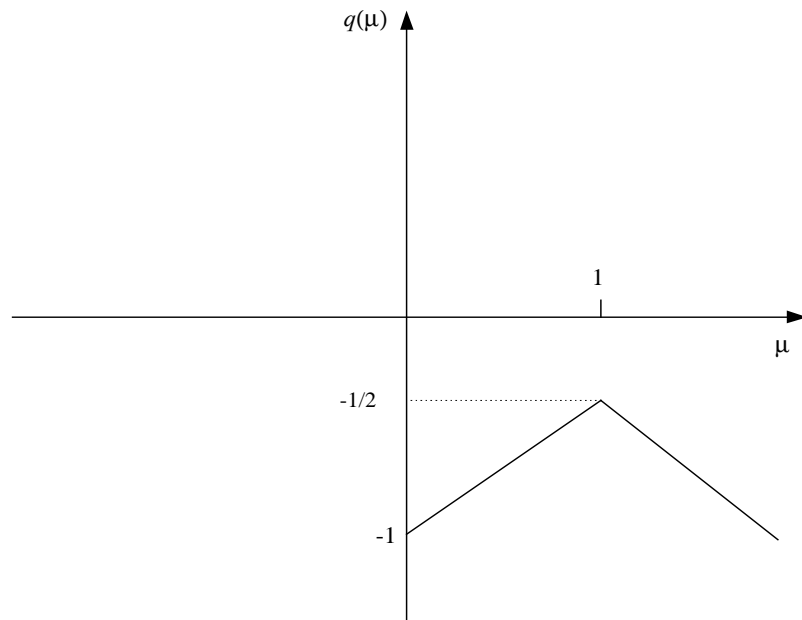


Figura 4.1 – Função Dual – Exemplo Ilustrativo.

Baseado no gráfico da Figura 4.1, e sabendo que a função dual deve ser maximizada, a solução ótima é $q^*(\mu^*) = -1/2$ para $\mu^* = 1$. Entretanto, resolvendo o problema primal,

representado por (4.8), encontramos o valor de $x^* = 0$ que minimiza a função objetivo $f^*(x^*) = 0$.

A partir da análise das soluções ótimas podemos verificar que existe uma diferença entre as mesmas, que é definida como *gap* de dualidade [28], e calculada como sendo:

$$gap = f^*(x^*) - q^*(\mu^*) = 0 - (-1/2) = 1/2 \quad (4.11)$$

Outro fato importante que pode ser verificado neste exemplo é a infactibilidade do problema primal quando se resolve o problema dual, uma vez que, a restrição relaxada $g(x)$, pode não ser atendida. Para justificar isso, podemos escrever a função dual quando $\mu = 1$ (ponto ótimo):

$$q(\mu) = \min_{x \in \{0 \text{ ou } 1\}} \{-x + 1(x - 1/2)\} = \min_{x \in \{0 \text{ ou } 1\}} \{-x + (x - 1/2)\} = \min_{x \in \{0 \text{ ou } 1\}} \{-1/2\} \quad (4.12)$$

A solução x_μ associada à função dual, representada por (4.12), é indiferente, ou seja, $x_\mu = 0$ ou $x_\mu = 1$ são soluções ótimas para o problema de minimização, e no caso de $x_\mu = 1$ a restrição $g(x) = x - 1/2 \leq 0$ não é atendida. Desta forma, a solução é dita infactível, e para problemas reais, a solução primal deve ser recuperada, conforme é discutida no capítulo seguinte.

Adicionalmente, o problema dual, originário de um problema primal inteiro-misto, é de natureza não-diferenciável ou, pelo menos, não-diferenciável para todos os pontos da função dual [28].

Um problema composto por uma função qualquer $S(y)$, é diferenciável para todo $y \in \mathcal{R}$ quando seu gradiente (derivada primeira) $\nabla S(y)$ é uma função contínua de y . Isso pode ser exemplificado por meio de uma função quadrática mostrada na Figura 4.2.

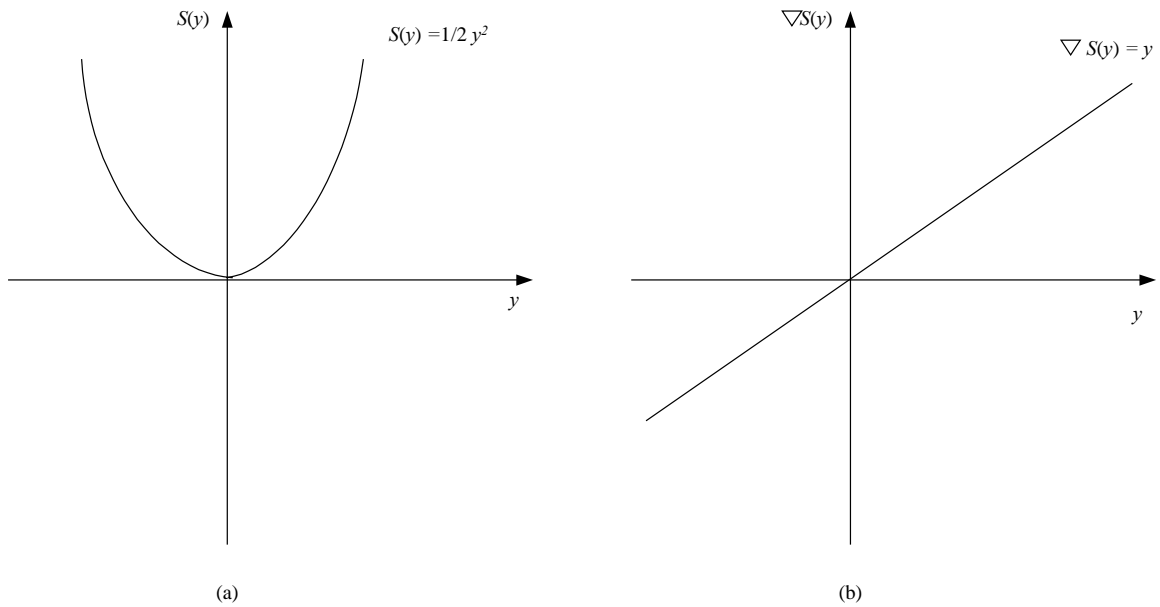


Figura 4.2 – (a) Função Quadrática e (b) Gradiente da Função.

A partir da figura apresentada podemos verificar que o gradiente da função $S(y)$ é contínuo, ou seja, para cada valor de y existe um único valor de $\nabla S(y)$. Diferentemente desta função, a função dual, representada por (4.9), é não-diferenciável devido a descontinuidade apresentada pela mesma sendo representado o subdiferencial da função, denotado por $\partial q(\mu)$, conforme mostrado na Figura 4.3.

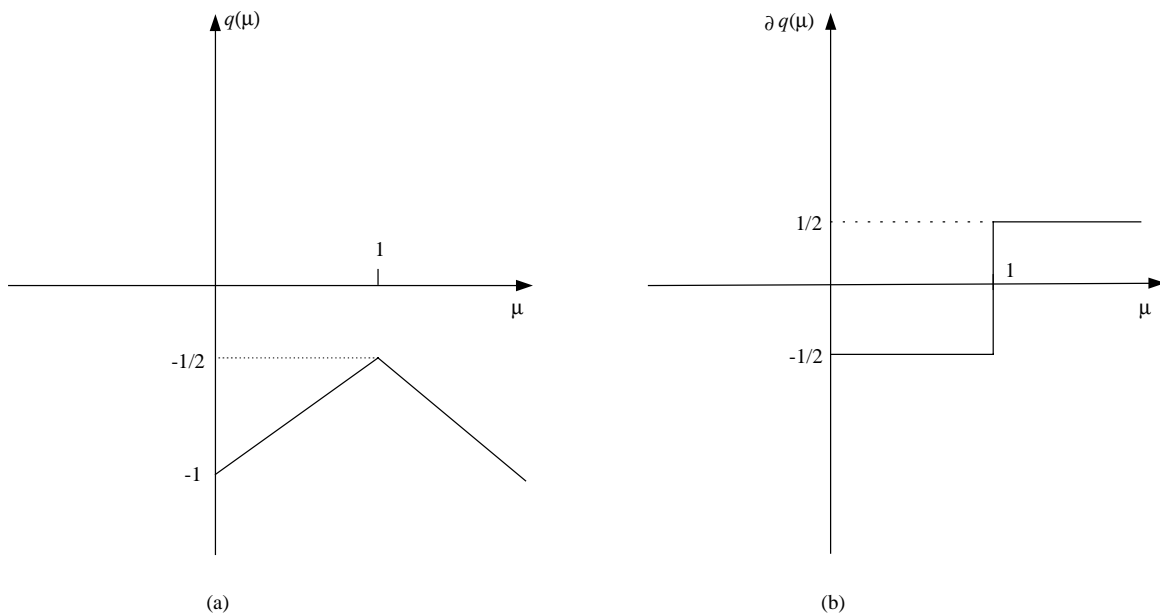


Figura 4.3 – (a) Função Dual e (b) Subdiferencial da Função.

Por definição, o subdiferencial $\partial q(\mu)$ calculado em μ representa o conjunto dos subgradientes $g(x_\mu)$ da função $q(\mu)$ em μ [28]. Como exemplo, considere $\mu = 1$. Neste caso todos os valores contidos no intervalo $[-1/2, 1/2]$ são, a princípio, candidatos a subgradientes do subdiferencial da função dual, nesse ponto.

Entretanto, observando o problema de minimização da função dual, representada por (4.9), a variável x_μ pode assumir somente os valores 0 ou 1, desta maneira, o subdiferencial no ponto $\mu = 1$ é o conjunto discreto de subgradientes $\{-1/2 \text{ e } 1/2\}$.

Podemos testar se $g(x_\mu^1) = -1/2$ é realmente subgradiente da função dual $q(\mu)$, representada por (4.9), para tanto podemos adaptar a Expressão (4.7) ao nosso problema:

$$q(\lambda) \leq q(\mu) + (\lambda - \mu)g(x_\mu^1) \quad \text{para qualquer } \lambda \in \mathfrak{R}^n \quad (4.13)$$

Seja $\lambda = 0$. O valor da função dual $q(\lambda)$, representada por (4.9), é -1 e para $\mu = 1$, $q(\mu) = -1/2$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} -1 &\leq -1/2 + (0 - 1) \cdot (-1/2) \\ -1 &< 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

O que ilustra que $g(x_\mu^1) = -1/2$ é um subgradiente da função dual $q(\mu)$ em $\mu = 1$.

Observe que a solução do problema dual não-diferenciável não pode ser obtida a partir de métodos que utilizam informações do gradiente tanto em seu processo iterativo de busca da solução, quanto para critério de convergência. Os métodos aplicáveis a esses problemas são chamados de Métodos de Otimização Não-Diferenciável, os quais são mostrados a seguir.

4.3 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO NÃO-DIFERENCIÁVEL

Os métodos apresentados neste trabalho resolvem o problema dual não-diferenciável computando o valor da função dual e o subgradiente para uma seqüência de multiplicadores μ^k , onde k é o índice da iteração atual do processo de solução do problema dual.

Basicamente, o processo de solução destes problemas consiste na atualização dos multiplicadores μ , podendo ser resumido como: a cada iteração k , para um multiplicador μ^k fixo, deve se obter um x_{μ^k} que minimiza a função Lagrangeana $L(x, \mu)$, apresentada em

(4.3), onde o subgradiente $g(x_{\mu^k})$ e a função dual $q(\mu^k)$ podem ser calculados. A partir destas informações o μ^k é atualizado dando início à próxima iteração, com $k = k + 1$.

Os métodos de otimização não-diferenciável podem ser de dois tipos: o que utiliza a cada iteração somente a informação do subgradiente atual, como no caso do Método do Subgradiente [26,28,29]; e os que usam informações de todos os subgradientes previamente calculados, tais como o Método dos Planos Cortantes [23,28,29] e o Método de Feixes [18,23,28,31-35]. A seguir, esses métodos são apresentados, enfatizando o método de feixes que, posteriormente, é aplicado na solução do problema dual do planejamento da operação de curto prazo apresentado no Capítulo 3.

4.3.1 Método do Subgradiente

O método do subgradiente gera uma seqüência de pontos ($\mu \geq 0$) na solução do problema dual, sendo que, a cada iteração um novo multiplicador μ é calculado por:

$$\mu^{k+1} = \mu^k + s^k g(\mu^k), \quad (4.15)$$

onde, $g(\mu^k)$ representa o subgradiente da iteração atual $g(x_{\mu^k})$, e s^k é o tamanho de passo positivo que pode ser calculado por heurísticas como, por exemplo, a definida em [28].

Apesar de ser de fácil implementação, o método do subgradiente apresenta dificuldades em sua aplicação a problemas reais. Essas dificuldades são relacionadas à ausência de um critério de convergência e a oscilações (*zig-zag*) durante a solução do problema sendo, muitas vezes, difícil convergir para solução final do problema.

Seja uma função $F(x)$, diferenciável para qualquer $x \in \Re$, de um problema irrestrito. O teste de parada do algoritmo de problemas de otimização deste tipo de função pode ser escrito como:

$$\|\nabla F(x)\| \leq \varepsilon \quad (4.16)$$

onde, ε é um número pequeno e positivo.

Analogamente, com base no subgradiente da função dual, podemos escrever, para problemas de otimização não-diferenciável, o seguinte critério de convergência:

$$\|g(\mu^k)\| \leq \varepsilon \quad (4.17)$$

com, $g(\mu^k) \in \partial q(\mu^k)$.

Na prática, este critério não é aplicável a problemas de funções não-diferenciáveis, pois ele pode não ser atingido. Vejamos o exemplo da Função Dual (4.9), no ponto ótimo, com $\mu = 1$, o subgradiente $g(\mu)$ pode assumir os valores pertencentes ao conjunto $\{-1/2 \text{ e } 1/2\}$ e, assim, o critério de convergência, representado por (4.17), nunca é atendido, apesar de que já se obteve o máximo da função.

Além da ausência de um critério de parada bem definido, outro ponto que impõe dificuldades na utilização do método do subgradiente para problemas não-diferenciável é o fato que o subgradiente não garante subida para todas as iterações, durante a solução do problema, ou seja, uma nova iteração k pode não melhorar o valor da função dual $q(\mu)$ para um dado tamanho de passo s^k e, desta forma, podemos ter:

$$q(\mu^{k+1}) < q(\mu^k) \quad (4.18)$$

A Figura 4.4 apresenta, de forma ilustrativa, uma comparação entre problemas de maximização diferenciável e não-diferenciável.

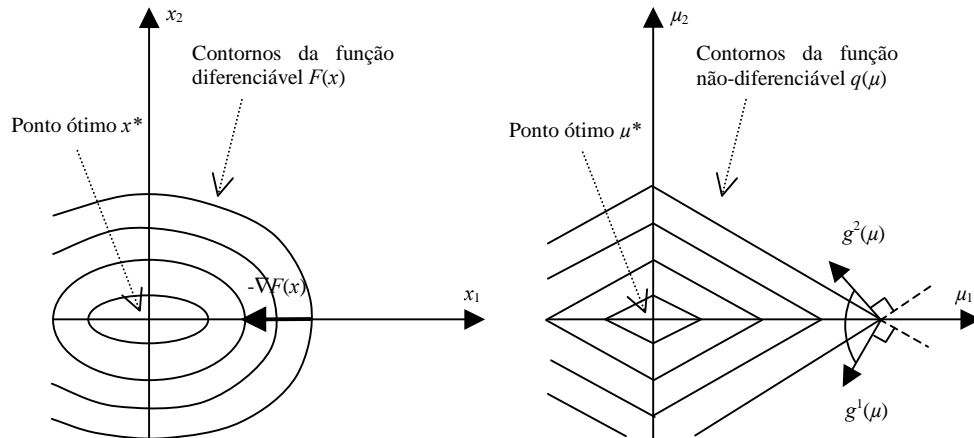


Figura 4.4 – Funções diferenciável e não-diferenciável – Exemplo Ilustrativo.

Na Figura 4.4 para a função diferenciável $F(x)$ é garantida a direção de subida pelo negativo do gradiente $-\nabla F(x)$, que aponta na direção do ponto ótimo. Entretanto, para a função não-diferenciável $q(\mu)$, os subgradientes $g(\mu) \in \partial q(\mu)$ em um ponto qualquer da função, não apontam necessariamente na direção do ponto ótimo.

Os métodos de subgradiente diferem uns dos outros, basicamente, na determinação do tamanho de passo s^k da Expressão (4.15). Esses métodos, por meio da escolha de passos

que gradualmente são reduzidos tentando garantir que, a cada iteração k , os valores de μ^{k+1} , calculados melhorem a função dual $q(\mu^{k+1})$.

Podemos ilustrar este processo mostrando um problema não-diferenciável cuja função objetivo contém o módulo das variáveis:

$$\underset{\mu}{\text{maximize}} \quad q(\mu) = -2|\mu_1| - |\mu_2| \quad (4.19)$$

Reescrevendo a função numericamente:

$$q(\mu) = \begin{cases} -2\mu_1 - \mu_2 & \text{se } \mu_1 \geq 0 \text{ e } \mu_2 \geq 0; \\ 2\mu_1 - \mu_2 & \text{se } \mu_1 \leq 0 \text{ e } \mu_2 \geq 0; \\ -2\mu_1 + \mu_2 & \text{se } \mu_1 \geq 0 \text{ e } \mu_2 \leq 0; \\ 2\mu_1 + \mu_2 & \text{se } \mu_1 \leq 0 \text{ e } \mu_2 \leq 0; \end{cases} \quad (4.20)$$

A solução ótima deste problema é $q(\mu^*) = 0$ com $\mu^* = (\mu_1; \mu_2) = (0; 0)$.

Seja o ponto $\mu^0 = (\mu_1; \mu_2) = (1; 0)$. O intervalo que define o subdiferencial da função e o valor da função neste ponto são, respectivamente, $\partial q(\mu^0) = [(-2; -1), (-2; 1)]$ e $q(\mu^0) = -2$. A partir destas informações podemos realizar uma iteração do método do subgradiente para um valor de $s = 2$ e o subgradiente $g(\mu^0) = (-2; -1)$:

$$\mu^1 = \mu^0 + s \cdot g(\mu^0) = (1; 0) + 2 \cdot (-2; -1) = (-3; -2) \quad (4.21)$$

No ponto $\mu^0 = (-3; -2)$, calculado em (4.21), o valor da função $q(\mu^1)$ vale -8, ou seja, ocorreu uma significativa piora em relação ao valor de $q(\mu^0)$. Desta forma, reduzindo o valor de s para $s = 2/10$ podemos recalculer μ^1 :

$$\mu^1 = \mu^0 + s \cdot g(\mu^0) = (1; 0) + 0,2 \cdot (-2; -1) = (0,6; -0,2) \quad (4.22)$$

Para $\mu^1 = (0,6; -0,2)$ tem-se $q(\mu^1) = -1,4$. Assim, a redução do tamanho de passo proporcionou uma melhora na função objetivo do problema.

Desta forma, podemos afirmar que no método do subgradiente a questão central é a escolha de tamanhos de passo que proporcionem subida para o valor da função dual. Contudo, nem sempre isto é possível, especialmente quando este método é aplicado em problemas reais. Além disto, a determinação de passos muito pequenos pode aumentar expressivamente o número de iterações.

4.3.2 Método dos Planos Cortantes

Para resolver o problema dual, o método dos planos cortantes constrói uma aproximação da função dual a partir da preservação das informações do subgradiente e do valor da função dual, calculados a cada iteração e atualizando os multiplicadores μ . Para demonstrar este método considere, novamente, o problema dual:

$$\max_{\mu} q(\mu) \quad (4.23)$$

sujeito a: $\mu \geq 0$

sendo a função dual $q(\mu)$, escrita como:

$$q(\mu) = \min_x \{f(x) + \mu g(x)\} \quad (4.24)$$

Inicialmente, devemos transformar a função dual $q(\mu)$ em uma função linear por partes $Q^k(\mu)$, sendo que para k -ésima iteração temos:

$$Q^k(\mu) = \min \{q(\mu^1) + (\mu - \mu^1)'g(\mu^1), q(\mu^2) + (\mu - \mu^2)'g(\mu^2), \dots, q(\mu^k) + (\mu - \mu^k)'g^k\} \quad (4.25)$$

reescrevendo,

$$Q^k(\mu) = \min \{q(\mu^i) + (\mu - \mu^i)'g(\mu^i), \dots, q(\mu^k) + (\mu - \mu^k)'g(\mu^k)\} \quad (4.26)$$

onde,

i é o índice das aproximações lineares que compõe o modelo da função dual, representado por (4.26);

$g(\mu^i)$ é o subgradiente calculado no ponto μ^i ;

μ é a variável linear da função aproximada;

$q(\mu^i)$ é a função dual no ponto μ^i , calculada por:

$$q(\mu^i) = \min \{f(x_{\mu^i}) + \mu^i' g(\mu^i)\}. \quad (4.27)$$

A formação da função dual aproximada, durante o processo de solução do problema pelo método dos planos cortantes, é ilustrada na Figura 4.5.

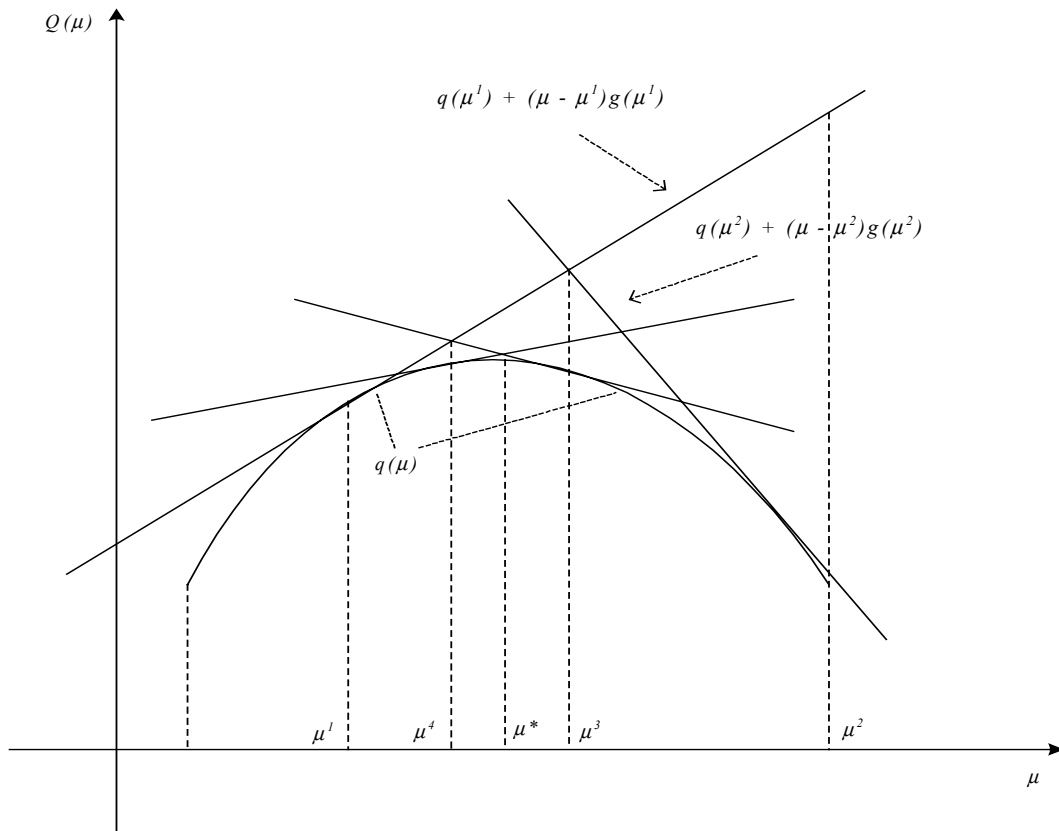


Figura 4.5 – Ilustração do Processo de Aproximação da Função Dual.

Na figura apresentada, a cada nova iteração k um novo plano $q(\mu^i) + (\mu - \mu^i)'g(\mu^i)$ é adicionado para formar a nova aproximação da função dual, representada por (4.26). Desta forma, pode-se afirmar que, quando mais avançado está o processo iterativo, melhores aproximações são obtidas para a função dual.

Tendo por base o problema dual, representado por (4.23), e o modelo aproximado da função dual, representado por (4.26), podemos escrever o seguinte problema de otimização linear:

$$\begin{aligned} & \max_{Q, \mu} Q \\ & \text{sujeito a: } Q \leq q(\mu^i) + (\mu - \mu^i)'g(\mu^i) \quad i = 1, 2, \dots, k \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

onde,

Q é a variável linear que representa a função linear aproximada $Q(\mu)$, na solução do Problema (4.28).

O problema de programação linear, representado por (4.28), é, em geral, chamado de problema mestre e deve ser resolvido a cada iteração k para um novo conjunto de restrições (aproximações lineares), obtendo-se a solução ótima para as variáveis Q e μ . Desta forma, atualizam-se os valores da função linear aproximada e do multiplicador para a próxima iteração, como segue:

$$\begin{aligned}\mu^{k+1} &= \mu \\ Q^{k+1}(\mu^{k+1}) &= Q\end{aligned}\tag{4.29}$$

Uma das vantagens do método dos planos cortantes é a existência de um critério de parada que não está associado diretamente ao subgradiente da função dual. Esse critério é obtido, naturalmente, da idéia de que quando a solução ótima é encontrada o valor função dual, representada por (4.24), deve ser igual ao da sua função aproximada, representada por (4.26). Assim, podemos escrever, para o ponto ótimo que:

$$Q(\mu^*) = q(\mu^*)\tag{4.30}$$

Entretanto, sabe-se que, numericamente, a Expressão (4.30) pode não ser verdadeira e, desta forma, para o processo iterativo podemos escrever o seguinte critério de convergência:

$$\delta^k = Q^{k+1}(\mu^{k+1}) - q(\mu^k)\tag{4.31}$$

com,

$$\delta^k \leq \varepsilon\tag{4.32}$$

onde δ^k é denominado de medida de avanço ou progresso do algoritmo para k -ésima iteração, que converge quando a Expressão (4.32) é atendida.

A partir destas informações podemos definir um algoritmo para o método dos planos cortantes, conforme mostrado no Quadro 4.1, a seguir.

Passo inicial – Seja um multiplicador $\mu^1 \geq 0$, resolver o problema primal de minimização associado a função dual, representada por (4.24), fazendo x_{μ^1} ser a sua solução ótima, onde, $q(\mu^1)$ e $g(\mu^1)$ são calculados. Ir para o Passo 1;

Passo 1 – Associar a aproximação linear (corte), a partir dos valores de $q(\mu^k)$ e $g(\mu^k)$, ao modelo da função dual, representada por (4.26), com $i = 1, \dots, k$, resolver o problema mestre, representado por (4.28), obtendo-se a solução ótima Q e μ , e atualizando $\mu^{k+1} = \mu$ e $Q^{k+1}(\mu^{k+1}) = Q$;

Passo 2 – Com os valores de $Q^{k+1}(\mu^{k+1})$ e $q(\mu^{k+1})$ calcular a medida do progresso por (4.31) e, se o teste de convergência, representado por (4.32), for atendido a solução é ótima. Se não, seja $\mu^{k+1} \geq 0$ obtido no Passo 1, resolver o problema primal de minimização associado a função dual, representada por (4.24), fazendo $x_{\mu^{k+1}}$ ser a sua solução ótima, onde, $q(\mu^{k+1})$ e $g(\mu^{k+1})$ são calculados. Fazer $k = k + 1$ e ir para o Passo 1

Quadro 4.1 – Algoritmo para o Método dos Planos Cortantes.

Embora apresente evolução com relação ao método do subgradiente, o método dos planos cortantes ainda possui problemas com relação a sua aplicação. Um deles é a instabilidade intrínseca ao método [23] que ocasiona oscilações, principalmente, perto do ponto ótimo dificultando a convergência do algoritmo. Ou seja, o método dos planos cortantes, da mesma forma que o método do subgradiente, não pode ser considerado um método de subida para solução do problema dual não-diferenciável. Essa oscilação está associada ao fato de que a solução do problema mestre linear, representado por (4.28), acontece nos vértices da função aproximada, ou seja, nas intersecções dos planos que a compõe, conforme ilustrado na Figura 4.6.

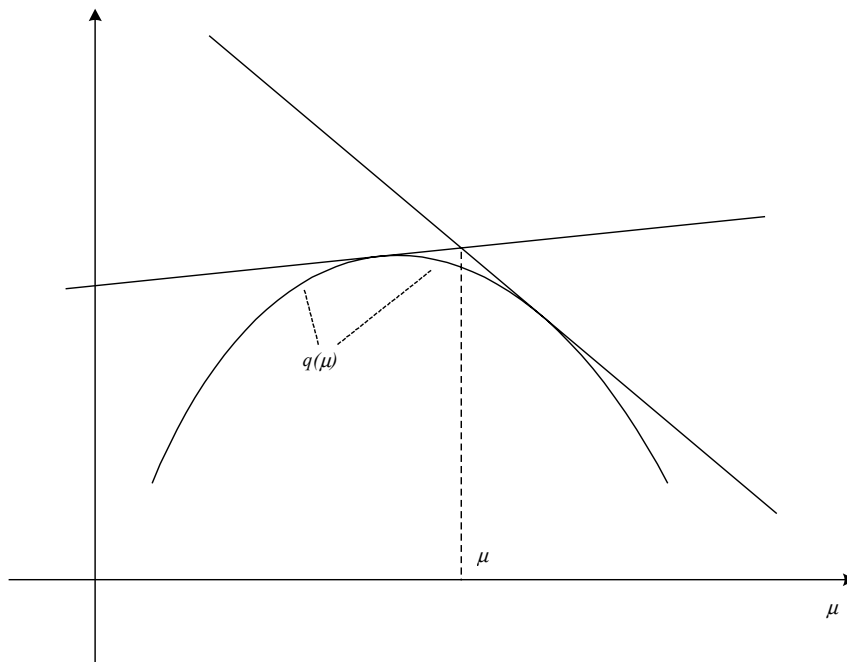


Figura 4.6 – Ilustração da Solução do Problema Mestre com Duas Aproximações.

Muitas vezes, na solução do problema mestre, e principalmente nas iterações iniciais, as variáveis μ podem ser ilimitadas e, desta maneira, necessitando a adição de restrições de “caixa” (limites superior) [31], sendo que, para problemas reais de grande porte, este fato pode impor dificuldades adicionais na sua solução. A Figura 4.8 ilustra como isto ocorre.

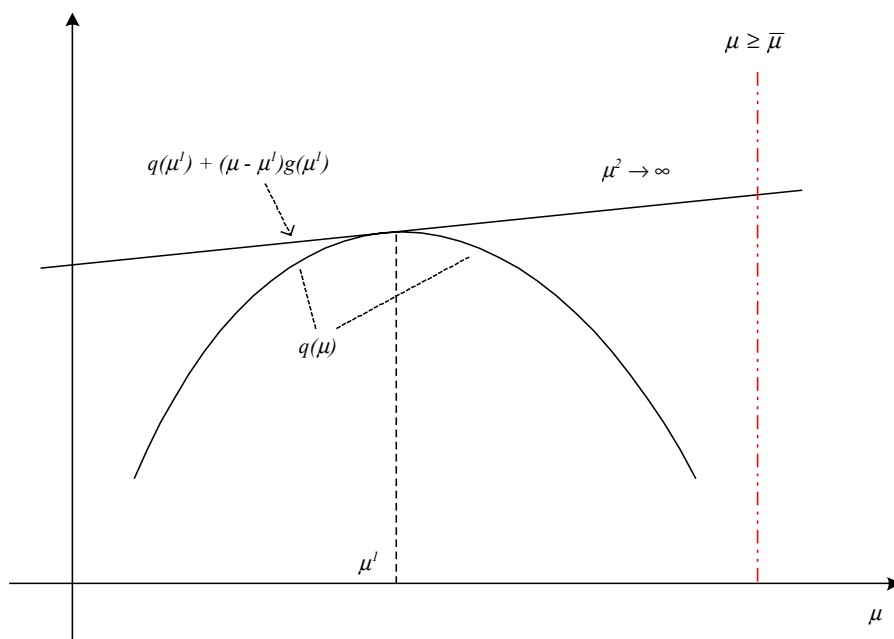


Figura 4.7 – Ilustração do Problema Mestre Ilimitado.

Analisando a Figura 4.7 verifica-se que, sendo a aproximação da função dual, representada por (4.26), composta por um único plano, o problema mestre, necessita da restrição $\mu \geq \bar{\mu}$ que limita a variável μ , onde, $\bar{\mu}$ é uma constante positiva. Pois, de outra forma, a sua solução μ^2 tenderia para o infinito.

4.3.3 Método de Feixes

Os métodos de otimização não-diferenciável apresentados até o momento não garantem melhora da função dual em todo o processo de solução do problema dual, ou seja, a função dual $q(\mu^{k+1})$, calculada para um multiplicador μ^{k+1} , em uma determinada iteração, pode apresentar decréscimo em relação ao valor anteriormente calculado com μ^k . Em função disto, esses métodos são ditos instáveis.

O método de feixes se caracteriza por resolver este tipo de imperfeição, de maneira que se possa obter um processo iterativo onde a maximização da função dual seja caracterizada pela geração de uma seqüência de multiplicadores μ que forneça uma “subida” efetiva ao ponto ótimo [23].

No método de feixes a formação da aproximação linear da função dual, representada por (4.26), que constitui o conjunto de restrições do problema mestre, é chamada de feixe e segue a mesma idéia do método dos planos cortantes, embora possam existir algumas variações que serão apresentadas mais adiante.

O princípio básico do método de feixes está na estabilização do método dos planos cortantes pela introdução de um termo quadrático na função objetivo do problema mestre, representado por (4.28), controlado por um parâmetro positivo de penalização c e por um ponto μ_k que é o centro de estabilidade, correspondente ao multiplicador da iteração atual, conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \max_{Q, \mu} \quad & Q - \frac{1}{2} c^k \|\mu - \mu^k\|^2 \\ \text{sujeito a:} \quad & Q \leq q(\mu^i) + (\mu - \mu^i)g(\mu^i) \quad i = 1, \dots, k \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Desta maneira o custo de se ter um método de planos cortantes estável é que, a cada iteração k , é necessário a solução de um problema de programação quadrática.

Neste ponto é interessante ilustrar como o termo quadrático possibilita, a partir do termo centralizador μ_k , o controle do problema de otimização, representado por (4.33). Para tanto, considere o seguinte problema mestre, que possui um único corte:

$$\begin{aligned} \max_{Q, \mu} \quad & Q - \frac{1}{2} \cdot \|\mu - 10\|^2 \\ \text{sujeito a:} \quad & Q \leq 51,5 + (\mu - 10) \cdot g(10) \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

O Problema (4.34) é ilustrado na Figura 4.8.

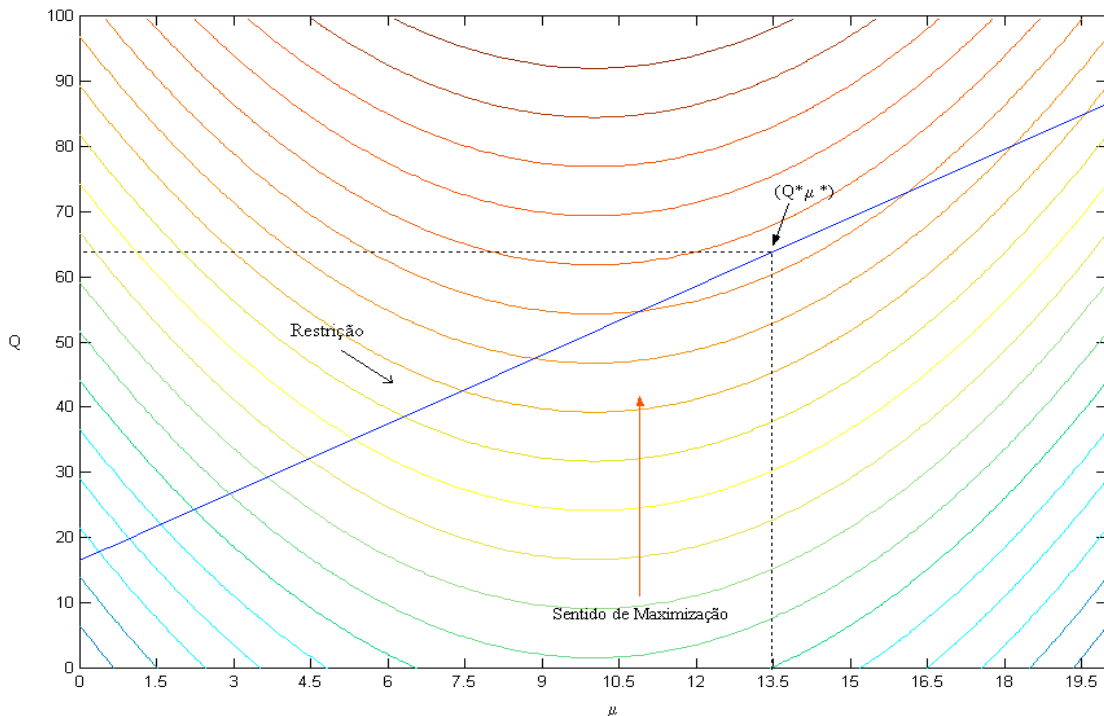


Figura 4.8 – Interpretação da Solução do Problema Quadrático.

Na Figura 4.8 as curvas de nível e a reta representam, respectivamente, a função objetivo e a restrição do problema em questão. Para resolver este problema podemos “caminhar” sobre a restrição no sentido de aumentar os valores de Q e μ . O máximo valor para a função objetivo (57,625) é alcançado para o ponto ótimo $(Q^*, \mu^*) = (63,75; 13,5)$. Repare que para valores superiores a este a função objetivo decresce. Isto ocorre pois o decréscimo relativo à parcela quadrática da função é superior ao aumento provocado pela parcela linear da função.

Desta maneira, o problema mestre tem sua solução relacionada com as restrições que o compõem, com o centro de estabilidade μ_k , e com abertura da parábola que é modificada por meio da alteração do parâmetro c .

A possibilidade de modificar o problema mestre, ajustando o parâmetro c , permite buscar soluções que proporcionem subida efetiva ao ponto ótimo da função dual, representada por (4.24).

A partir das informações apresentadas, pode-se afirmar que a solução do problema mestre, representado por (4.33), para um parâmetro c^k qualquer, é dita candidata $(\hat{Q}^{k+1}, \hat{\mu}^{k+1})$ à subida e assim podemos escrever:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^{k+1} &= \mu \\ \hat{Q}^{k+1}(\hat{\mu}^{k+1}) &= Q\end{aligned}\tag{4.35}$$

A Figura 4.9 ilustra como o problema mestre, representado por (4.33), pode fornecer varias soluções candidatas à subida.

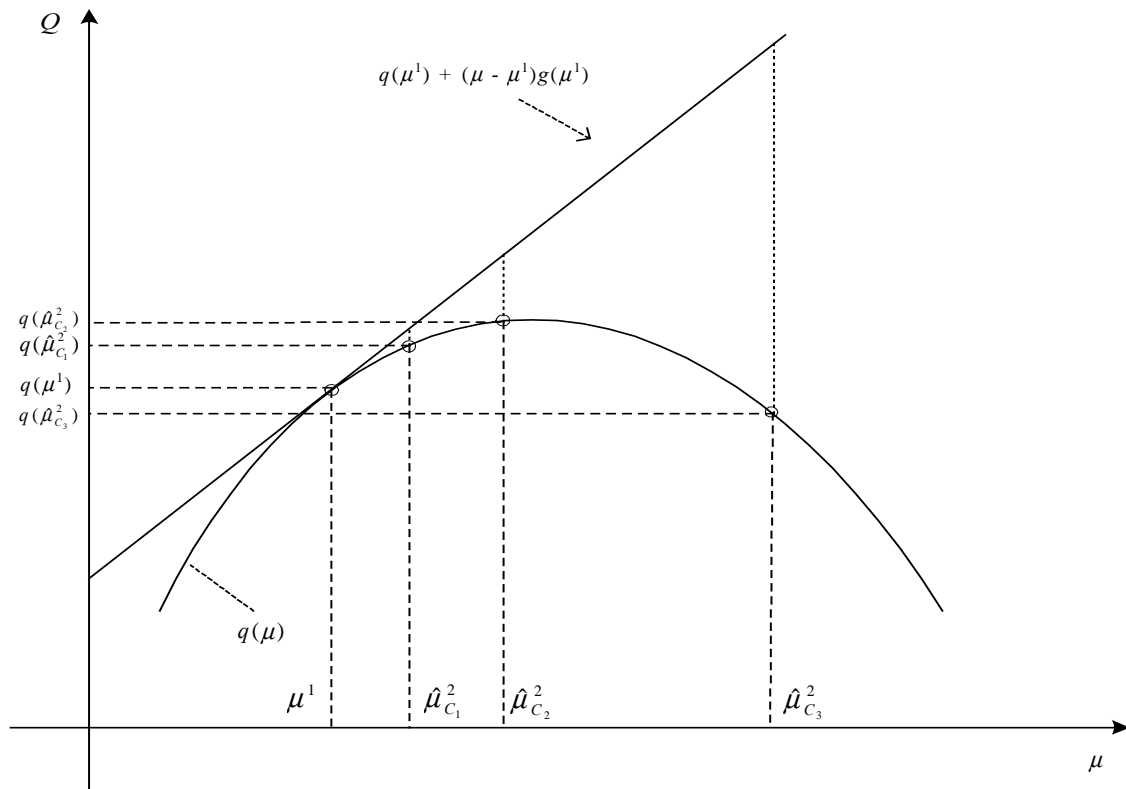


Figura 4.9 – Ilustração das Possíveis Soluções para o Problema Mestre.

Seja o problema mestre com uma única restrição, conforme apresentado na Figura 4.9. Os parâmetros $c_1 > c_2 > c_3$ proporcionam, a partir de μ^1 , as três soluções candidatas

para o problema mestre: $\hat{\mu}_{c_1}^2 < \hat{\mu}_{c_2}^2 < \hat{\mu}_{c_3}^2$. Associados aos multiplicadores, têm-se os correspondentes valores para a função dual, representada por (4.24), sendo:

$$\begin{aligned} q(\hat{\mu}_{c_1}^2) &> q(\mu^1) \\ q(\hat{\mu}_{c_2}^2) &> q(\hat{\mu}_{c_1}^2) \\ q(\hat{\mu}_{c_3}^2) &< q(\mu^1) \end{aligned} \tag{4.36}$$

Analisando a Expressão (4.36) podemos afirmar que: o parâmetro c_1^1 é uma tentativa “pessimista”, resultando em um multiplicador $\hat{\mu}_{c_1}^2$, que proporciona um acréscimo pequeno em relação ao valor da função dual atual $q(\mu^1)$; o parâmetro c_2^1 é uma opção “moderada”, que resulta em $\hat{\mu}_{c_2}^2$, pelo qual se obtém um maior acréscimo no valor da função dual, em relação ao obtido por $\hat{\mu}_{c_1}^2$; o parâmetro c_3^1 é “otimista”, resultando em $\hat{\mu}_{c_3}^2$, que provoca um decréscimo em relação ao valor da função dual atual $q(\mu^1)$. Isto ocorre pois, como foi visto anteriormente, o subgradiente nem sempre garante subida para a função dual. Desta forma, tanto $\hat{\mu}_{c_1}^2$ quanto $\hat{\mu}_{c_2}^2$ garantem melhora da função dual $q(\mu)$, sendo soluções de subida para o problema.

Dentro do processo iterativo do método de feixes, a busca por melhores soluções não é tão explícita como ilustrado anteriormente. O ponto central do algoritmo está em definir uma medida do progresso da solução que, além de determinar o critério de convergência, como no método dos planos cortantes, é utilizada na determinação dos passos “sérios” ou “nulos” [23].

A determinação de um passo sério, em uma iteração k , está relacionada com o acréscimo proporcionado no valor da função dual, representada por (4.24). Por outro lado, o passo nulo é determinado por valores da função dual, calculados a partir de soluções candidatas, que não são suficientemente melhores que a atual. Desta maneira, fazendo-se relação com a medida do progresso, podemos escrever:

$$\begin{cases} \text{se } q(\hat{\mu}^{k+1}) \geq q(\mu^k) + m \cdot \delta_F^k \text{ é passo sério;} \\ \text{senão, é passo nulo.} \end{cases} \tag{4.37}$$

onde m é uma constante positiva que pertence ao intervalo $[0,1]$.

Para o método de feixes a medida do progresso é adaptada a partir da Expressão (4.31), e pode ser escrita como:

$$\delta_F^k = \hat{Q}^{k+1}(\hat{\mu}^{k+1}) - q(\mu^k) + \frac{1}{2}c^k \|\hat{\mu}^{k+1} - \mu^k\|^2 \quad (4.38)$$

O termo quadrático em (4.38) corrige¹ os possíveis desvios causados em $\hat{Q}^{k+1}(\hat{\mu}^{k+1})$ para valores c^k muito elevados, uma vez que, além de influenciar na solução para a variável μ , o parâmetro c^k influencia na solução para a variável Q do problema, representado por (4.33), que podem causar falsa convergência. Entretanto, em [35] não é levada em consideração esta correção, uma vez que, a influência do parâmetro c é considerada desprezível sobre a medida do progresso. A convergência do algoritmo é obtida da mesma forma que no método dos planos cortantes, ou seja, quando a Expressão (4.32) é atendida.

Em caso de passo sério, a solução candidata à subida, representada por (4.35), é aceita como solução para iteração $k+1$ e o centro de estabilidade μ_k do problema quadrático é atualizado, desta forma pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \mu^{k+1} &= \hat{\mu}^{k+1} \\ Q^{k+1}(\mu^{k+1}) &= \hat{Q}^{k+1}(\hat{\mu}^{k+1}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Quando se verificar que a solução candidata à subida, representada por (4.35), proporciona passo nulo, mantém-se a solução da iteração atual:

$$\begin{aligned} \mu^{k+1} &= \mu^k \\ Q^{k+1}(\mu^{k+1}) &= Q^k(\mu^k) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ainda com relação ao parâmetro c , presente no problema, representado por (4.33), sabe-se que ele cumpre um papel importante no método de feixes, sendo necessário atualizá-lo dinamicamente, durante o processo iterativo. Desta forma, a ocorrência de um passo sério possibilita a redução do parâmetro c^{k+1} , ou seja, aumenta-se a confiança na busca de uma solução para o problema mestre da próxima iteração. Em outro sentido, para o caso de passo nulo, o parâmetro c^{k+1} é aumentado, reduzindo a confiança do problema mestre na próxima iteração.

A atualização deste parâmetro depende de heurística, como a que é apresentada a seguir [35]. Em caso de passo sério atualiza-se o parâmetro c da seguinte maneira:

¹ Observar que no Problema (4.33) o termo quadrático está embutido no valor de Q .

$$c^{k+1} = \max\{c_{\text{int}}^{k+1}, c^k / 10, c_{\min}\} \quad (4.41)$$

onde,

c_{\min} é uma constante positiva que representa o menor valor permitido para o parâmetro c durante o processo iterativo;

c_{int}^{k+1} é o valor do parâmetro c obtido por uma interpolação quadrática [35] e pode ser escrito como:

$$c_{\text{int}}^{k+1} = 2c^k \frac{[1 - (q(\hat{\mu}^{k+1}) - q(\mu^k))]}{\hat{Q}^{k+1}(\hat{\mu}^{k+1}) - q(\mu^k)} \quad (4.42)$$

Para um passo nulo o parâmetro c^{k+1} é calculado por:

$$c^{k+1} = \min\{c_{\text{int}}^{k+1}, 10c^k, c_{\max}\} \quad (4.43)$$

onde,

c_{\max} é uma constante positiva, em geral, muito grande que representa o maior valor permitido para o parâmetro c durante o processo iterativo.

Uma heurística mais simples [18] para atualização do parâmetro c é mostrada a seguir:

Assim, na ocorrência de passo sério teremos:

$$c^{k+1} = \max\left\{\frac{c^k}{1,1}, c_{\min}\right\} \quad (4.44)$$

E se obter passo nulo o parâmetro para próxima iteração é atualizado por:

$$c^{k+1} = \frac{(c^k + c_{\max})}{2} \quad (4.45)$$

No Quadro 4.2, o método dos feixes é resumido na forma de um algoritmo básico.

Passo inicial – Seja $k = 1$ e um multiplicador qualquer $\mu^l \geq 0$, resolver o problema de minimização associado a função dual, representada por (4.24), fazendo x_{μ^l} ser a solução ótima, onde $q(\mu^l)$ e $g(\mu^l)$ são calculados.

Passo 1 – Associar a aproximação linear (restrição), a partir dos valores de $q(\mu^k)$ e $g(\mu^k)$, ao feixe do problema mestre, representada por (4.33), com $i = 0, \dots, k$. Resolver este problema, obtendo-se a solução ótima Q e μ , e fazer esta ser a solução candidata a subida $\hat{\mu}^{k+1} = \mu$ e $\hat{Q}^{k+1}(\hat{\mu}^{k+1}) = Q$;

Passo 2 – Calcular a medida de progresso pela Expressão (4.40) e se o teste de convergência, representado por (4.32), for atendido a solução é ótima e o algoritmo deve parar. Se não, ir para o Passo 3.

Passo 3 – Seja o multiplicador candidato $\hat{\mu}^{k+1} \geq 0$, resolver o problema de minimização associado à função dual, representada por (4.24), fazendo $x_{\hat{\mu}^{k+1}}$ ser a sua solução ótima onde $q(\hat{\mu}^{k+1})$ e $g(\hat{\mu}^{k+1})$ são calculados.

Passo 4 – Verificar se o passo é sério ou nulo por meio da Expressão (4.37). Em caso de passo sério a solução candidata à subida é aceita, como expresso em (4.38), atualizando o centro de estabilidade μ_k e calcula-se um parâmetro c^{k+1} utilizando a Expressão (4.41). Se for passo nulo a solução da iteração atual é mantida, como apresentado em (4.39), e obtém-se um novo parâmetro c^{k+1} por meio de (4.43). Fazer $k = k + 1$ e ir para o Passo 1.

Quadro 4.2 – Algoritmo para o Método de Feixes.

Cabe ressaltar que, além de eliminar as oscilações presentes no método dos planos cortantes, no método de feixes não existe a necessidade de introduzir restrições de “caixa” artificiais, em função do termo quadrático que limita, naturalmente, a solução do problema mestre, representada por (4.33).

4.3.3.1 Compressão do Feixe

A possibilidade de se reduzir a dimensão do feixe (conjunto das restrições lineares), sem que se prejudique a convergência do algoritmo, é a chamada compressão do feixe [23]. Para tanto, podemos reescrever o problema mestre, representado por (4.33), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \max_{Q, \mu} Q - \frac{1}{2} c^k \|\mu - \mu^k\|^2 \\
& \text{sujeito a: } Q \leq q(\mu^i) + (\mu - \mu^i)g(\mu^i) \rightarrow \rho^i \quad i = 1, 2, \dots, km \\
& \mu \geq 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

onde,

ρ^i é o multiplicador de Lagrange associado a i -ésima restrição que compõe o feixe;

km é número máximo de restrições permitidas para compor o feixe, ou seja, quando o número de restrições adicionadas ao feixe for km , este deve ser comprimido, sendo o conjunto de restrições transformado em uma única restrição linear equivalente, que é escrita como [23]:

$$Q \leq \sum_{i=1}^{km} \rho^i q(\mu^i) + \sum_{i=1}^{km} \rho^i (\mu - \mu^i) g^i \tag{4.47}$$

Deve-se observar que com esta estratégia apenas as restrições ativas são conservadas, isto por que, cada uma delas é penalizada pelo respectivo multiplicador de Lagrange.

A compressão do feixe é útil pois diminui a dimensão do problema quadrático, a ser resolvido a cada iteração, acelerando sua solução.

A seguir é apresentado um exemplo didático que ilustra a aplicação do método de feixes em problemas não-diferenciáveis.

4.3.3.2 Exemplo Didático

Seja o seguinte problema primal de programação inteira:

$$\begin{aligned}
& \min_x f(x) = 25x_1 + 10x_2 + 5x_3 \\
& \text{sujeito a: } 2x_1 + x_2 \geq 4 \quad (g(x)) \\
& \quad \quad \quad x_1 + x_2 + x_3 = 5 \quad (h(x)) \\
& \quad \quad \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1, 2, 3\}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

O seu respectivo problema dual é:

$$\begin{aligned}
& \max_{\mu} q(\mu) \\
& \text{sujeito a: } \mu \geq 0
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Relaxando a restrição $g(x)$, apresentada em (4.48), a função dual $q(\mu)$ é escrita como sendo:

$$\begin{aligned} q(\mu) &= \min_x 25x_1 + 10x_2 + 5x_3 + \mu(-2x_1 - x_2 + 4) \\ \text{sujeito a: } & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x = (x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Inicialmente, devemos definir as constantes que são utilizadas no processo de solução do método de feixes:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 \times 10^{-3} \\ m &= 0,1 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Feito isto pode inicia-se a solução do problema:

Para, $k = 1$, $\mu^1 = 4$ (qualquer ponto), obtemos a solução primal associada $x_{\mu^1}^* = (x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 3)$, com os valores da função dual, representada por (4.50), e do subgradiente: $q(\mu^1) = 43$; $g(\mu^1) = 2$, sendo o subgradiente calculado por:

$$g(\mu^k) = -2x_1 - x_2 + 4; \quad (4.52)$$

Com os valores de $q(\mu^1)$ e $g(\mu^1)$ podemos montar o problema mestre com a primeira aproximação linear da função dual $Q^1(\mu)$, com $i = 1$:

$$\begin{aligned} \max_{Q, \mu} & Q - \frac{1}{2} c^1 \|\mu - 4\|^2 \\ \text{sujeito a: } & Q \leq 43 + 2 \cdot (\mu - 4) \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

A solução do problema mestre, representado por (4.53), para $c^1 = 0,5$ é: $\mu = 8$ e $Q = 51$, que corresponde à solução candidata, $\hat{\mu}^2 = 8$ e $\hat{Q}^2(\hat{\mu}^2) = 51$. Com $\hat{\mu}^2 = 8$, obtemos o valor da função dual, representada por (4.50), $q(\hat{\mu}^2) = 48$, do subgradiente, representado por (4.52), $g(\hat{\mu}^2) = 1$ e da solução primal associada $x_{\hat{\mu}^2}^* = (0, 3, 2)$.

Podemos, neste momento, calcular a medida de progresso, representada por (4.38) e testar a convergência utilizando a Expressão (4.32):

$$\delta_F^1 = \hat{Q}^2(\hat{\mu}^2) - q(\mu^1) + \frac{1}{2} c^1 \|\hat{\mu}^2 - \mu^1\|^2 \quad (4.54)$$

$$\delta_F^1 = 51 - 43 + \frac{1}{2} 0,5 \|8 - 4\|^2 = 12$$

$\delta_F^1 > 1 \times 10^{-3}$ não convergiu.

Por meio da Expressão (4.37), devemos verificar se o passo é sério ou nulo:

$$\begin{aligned} q(\hat{\mu}^2) &\geq q(\mu^1) + 0,1 \cdot \delta_F^1 \\ 48 &\geq 43 + 0,1 \times 12 \end{aligned} \quad (4.55)$$

$48 > 44,2 \Rightarrow$ Passo sério

No caso de passo sério pode se reduzir o parâmetro c para próxima iteração, com $c^2 = 0,1$ e aceitar a solução candidata a subida como solução: $\mu^2 = \hat{\mu}^2 = 8$ e $Q^2(\mu^2) = \hat{Q}^2(\hat{\mu}^2) = 51$. Fazendo $k = k + 1$ e adicionando-se um nova restrição, a partir dos valores de $q(\hat{\mu}^2)$ e $g(\hat{\mu}^2)$, montando-se o problema mestre com $i=1, \dots, 2$:

$$\begin{aligned} \max_{Q, \mu} \quad & Q - \frac{1}{2} c^2 \|\mu - 8\|^2 \\ \text{sujeito a:} \quad & Q \leq 43 + 2 \cdot (\mu - 4) \\ & Q \leq 48 + 1 \cdot (\mu - 8) \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

O problema mestre, representado por (4.56), resulta em: $\mu = 18$ e $Q = 58$, sendo a solução candidata, $\hat{\mu}^3 = \mu = 18$ e $\hat{Q}^3(\hat{\mu}^3) = Q = 58$. Com $\hat{\mu}^3 = 18$, obtemos o valor da função dual, representada por (4.50), $q(\hat{\mu}^3) = 23$ e do subgradiente, representado por (4.52), $g(\hat{\mu}^3) = -4$ com a solução primal associada $x_{\hat{\mu}^3}^* = (3, 2, 0)$.

A medida de progresso, representada por (4.38), e o teste de convergência, utilizando a Expressão (4.32), são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned} \delta_F^2 &= \hat{Q}^3(\hat{\mu}^3) - q(\mu^2) + \frac{1}{2} c^2 \|\hat{\mu}^3 - \mu^2\|^2 \\ \delta_F^2 &= 58 - 48 + \frac{1}{2} 0,1 \|18 - 8\|^2 = 15 \end{aligned} \quad (4.57)$$

$\delta_F^2 > 1 \times 10^{-3}$ não convergiu.

Novamente, verificar se o passo é sério ou nulo, fazendo-se uso da Expressão (4.37):

$$q(\hat{\mu}^3) \geq q(\mu^2) + 0,1 \cdot \delta_F^2$$

$$23 \geq 48 + 0,1 \times 15 \quad (4.58)$$

$23 < 49,5 \Rightarrow$ Passo nulo

Em caso de passo nulo deve-se aumentar o parâmetro c para próxima iteração, com $c^3 = 0,3$ e não aceitar a solução candidata a subida, mantendo-se a solução atual: $\mu^3 = \mu^2 = 8$ e $Q^3(\mu^3) = \hat{Q}^2(\hat{\mu}^2) = 51$. Fazendo $k = k+1 = 3$ e adicionando-se um nova restrição, aproveitando os valores de $q(\hat{\mu}^3)$ e $g(\hat{\mu}^3)$, montando-se o novo problema mestre com $i = 1, \dots, 3$:

$$\max_{Q, \mu} Q - \frac{1}{2} c^3 \|\mu - 8\|^2$$

sujeito a:

$$Q \leq 43 + 2 \cdot (\mu - 4)$$

$$Q \leq 48 + 1 \cdot (\mu - 8) \quad (4.59)$$

$$Q \leq 23 - 4 \cdot (\mu - 18)$$

$$\mu \geq 0$$

Prosseguindo na apresentação resumida para resolução do Problema Dual (4.49), obtemos a solução do problema mestre, representado por (4.59): $\hat{\mu}^4 = \mu = 11$; $\hat{Q}^4(\hat{\mu}^4) = Q = 51$, com ao valor da função dual, do subgradiente e da solução primal associada: $q(\hat{\mu}^4) = 47$; $g(\hat{\mu}^4) = -3$; $x_{\hat{\mu}^4}^* = (2, 3, 0)$.

Calcula-se a medida do progresso e a convergência é testada:

$$\delta_F^3 = \hat{Q}^4(\hat{\mu}^4) - q(\mu^3) + \frac{1}{2} c^3 \|\hat{\mu}^4 - \mu^3\|^2$$

$$\delta_F^3 = 51 - 48 + \frac{1}{2} 0,3 \|11 - 8\|^2 = 4,35 \quad (4.60)$$

$\delta_F^3 > 1 \times 10^{-3}$ não convergiu.

Verificar se o passo é serio ou nulo:

$$q(\hat{\mu}^4) \geq q(\mu^3) + 0,1 \cdot \delta^3$$

$$47 \geq 48 + 0,1 \times 4,35 \quad (4.61)$$

$47 < 48,44 \Rightarrow$ Passo nulo

Em caso de passo nulo: $c^4 = 0,6$ e mantém-se a solução atual: $\mu^4 = \mu^3 = 8$ e $Q^4(\mu^4) = Q^3(\mu^3) = 51$. Fazendo $k = k+1 = 4$ montando-se um novo problema mestre com $q(\hat{\mu}^4)$ e $g(\hat{\mu}^4)$, e $i = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \max_{Q, \mu} \quad & Q - \frac{1}{2} c^4 \|\mu - 8\|^2 \\ \text{sujeito a:} \quad & Q \leq 43 + 2 \cdot (\mu - 4) \\ & Q \leq 48 + 1 \cdot (\mu - 8) \\ & Q \leq 23 - 4 \cdot (\mu - 18) \\ & Q \leq 47 - 3 \cdot (\mu - 11) \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Solução do problema mestre, representado por (4.62): $\hat{\mu}^5 = \mu = 9,67$; $\hat{Q}^5(\hat{\mu}^5) = Q = 49,67$, com ao valor da função dual, do subgradiente e da solução primal associada: $q(\hat{\mu}^5) = 49,67$; $g(\hat{\mu}^5) = 1$; e $x_{\hat{\mu}^5}^* = (0, 3, 2)$.

Calcular a medida do progresso e testar a convergência:

$$\begin{aligned} \delta_F^4 &= \hat{Q}^5(\hat{\mu}^5) - q(\mu^4) + \frac{1}{2} c^4 \|\hat{\mu}^5 - \mu^4\|^2 \\ \delta_F^4 &= 49,67 - 48 + \frac{1}{2} 0,6 \|9,67 - 8\|^2 = 2,5 \end{aligned} \tag{4.63}$$

$\delta_F^4 > 1 \times 10^{-3}$ não convergiu.

Verificar se o passo é sério ou nulo:

$$\begin{aligned} q(\hat{\mu}^5) &\geq q(\mu^4) + 0,1 \cdot \delta^4 \\ 49,67 &\geq 48 + 0,1 \times 2,5 \\ 49,67 &> 48,25 \Rightarrow \text{Passo sério} \end{aligned} \tag{4.64}$$

Em caso de passo sério: $c^5 = 0,4 < c^4$ e a solução candidata a subida é aceita como solução: $\mu^5 = \hat{\mu}^5 = 9,67$ e $Q^5(\mu^5) = \hat{Q}^5(\hat{\mu}^5) = 49,67$. Fazendo $k = k+1 = 5$, montando-se um novo problema mestre com $q(\hat{\mu}^5)$ e $g(\hat{\mu}^5)$, e $i = 1, \dots, 5$:

$$\max_{Q, \mu} \quad Q - \frac{1}{2} c^5 \|\mu - 9,67\|^2$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeito a: } Q &\leq 43 + 2 \cdot (\mu - 4) \\
Q &\leq 48 + 1 \cdot (\mu - 8) \\
Q &\leq 23 - 4 \cdot (\mu - 18) \\
Q &\leq 47 - 3 \cdot (\mu - 11) \\
Q &\leq 49,67 + 1 \cdot (\mu - 9,67) \\
\mu &\geq 0
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Solução do problema mestre, representado por (4.65): $\hat{\mu}^6 = \mu = 10$; $\hat{Q}^6(\hat{\mu}^6) = Q = 50$, com ao valor da função dual, do subgradiente e da solução primal associada: $q(\hat{\mu}^6) = 50$; $g(\hat{\mu}^6) = 1$; $x_{\hat{\mu}^6}^* = (2, 3, 0)$.

Calcular a medida do progresso e testar a convergência:

$$\begin{aligned}
\delta_F^5 &= \hat{Q}^6(\hat{\mu}^6) - q(\mu^5) + \frac{1}{2} c^5 \|\hat{\mu}^6 - \mu^5\|^2 \\
\delta_F^5 &= 50 - 49,67 + \frac{1}{2} 0,4 \|10 - 9,67\|^2 = 0,35
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$\delta_F^5 > 1 \times 10^{-3}$ não convergiu.

Verificar se o passo é sério ou nulo:

$$\begin{aligned}
q(\hat{\mu}^6) &\geq q(\mu^5) + 0,1 \cdot \delta^5 \\
50 &\geq 49,67 + 0,1 \times 0,35 \\
50 &> 49,71 \Rightarrow \text{Passo sério}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Em caso de passo sério: $c^6 = 0,2$ e a solução candidata é aceita como solução de subida: $\mu^6 = \hat{\mu}^6 = 10$ e $Q^6(\mu^6) = \hat{Q}^6(\hat{\mu}^6) = 50$. Fazendo $k = k+1 = 6$, montando-se um novo problema mestre com $q(\hat{\mu}^6)$ e $g(\hat{\mu}^6)$, e $i = 1, \dots, 6$:

$$\max_{Q, \mu} Q - \frac{1}{2} c^6 \|\mu - 10\|^2$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeito a: } Q &\leq 43 + 2 \cdot (\mu - 4) & (r1) \\
Q &\leq 48 + 1 \cdot (\mu - 8) & (r2) \\
Q &\leq 23 - 4 \cdot (\mu - 18) & (r3) \\
Q &\leq 47 - 3 \cdot (\mu - 11) & (r4) \\
Q &\leq 49,67 + 1 \cdot (\mu - 9,67) & (r5) \\
Q &\leq 50 + 1 \cdot (\mu - 10) & (r6) \\
\mu &\geq 0
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Solução do problema mestre, representado por (4.68): $\hat{\mu}^7 = \mu = 10$; $\hat{Q}^7(\hat{\mu}^7) = Q = 50$, com ao valor da função dual, do subgradiente e da solução primal associada: $q(\hat{\mu}^7) = 50$; $g(\hat{\mu}^7) = 1$; $x_{\hat{\mu}^7}^* = (2, 3, 0)$.

Calcular a medida do progresso e testar a convergência:

$$\begin{aligned}
\delta_F^6 &= \hat{Q}^7(\hat{\mu}^7) - q(\mu^6) + \frac{1}{2} c^6 \|\hat{\mu}^7 - \mu^6\|^2 \\
\delta_F^6 &= 50 - 50 + \frac{1}{2} 0,2 \|10 - 10\|^2 \cong 0 \\
\delta_F^6 &< 1 \times 10^{-3} \text{ convergiu.}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Desta forma, temos como solução ótima para o problema dual, representado por (4.49), para $\mu^* = 10$, com o respectivo valor da função dual $q(\mu^*) = 50$.

A Figura 4.10 apresenta o conjunto de restrições do problema mestre, representado por (4.68), que é a aproximação linear por partes da função dual, representada por (4.50), construída no processo de maximização da mesma.

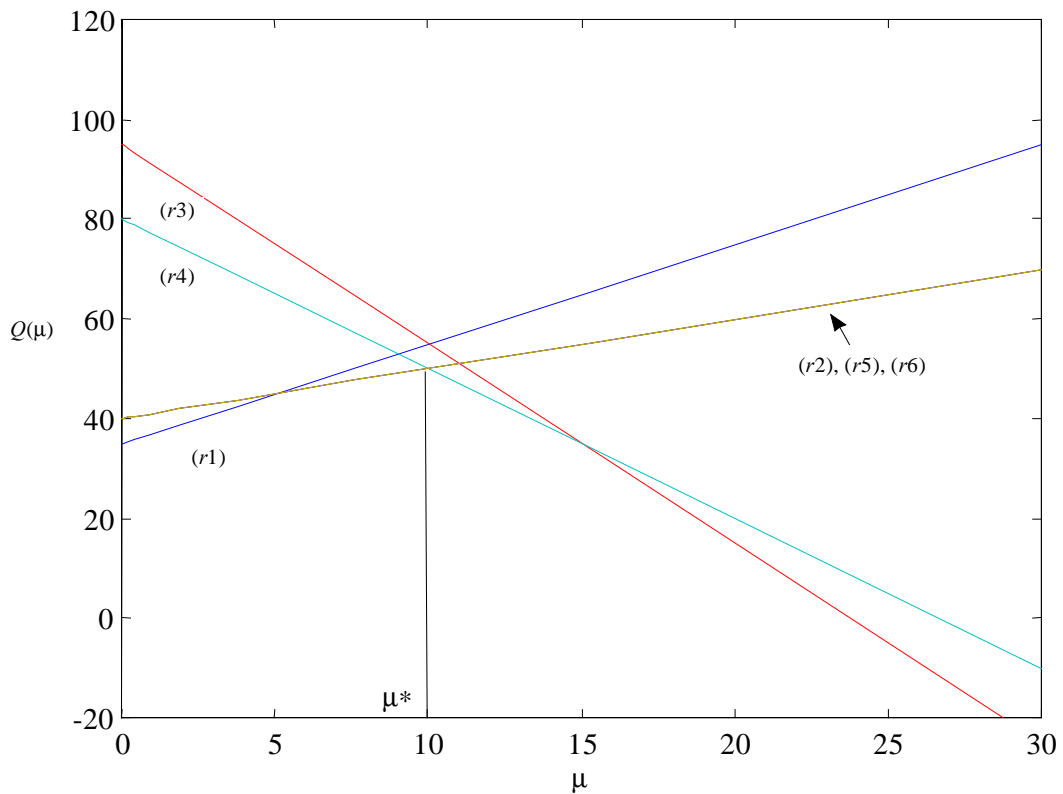


Figura 4.10 – Construção da Aproximação Linear da Função Dual.

A solução ótima do problema primal, representado por (4.48), é $f(x^*) = 55$ com $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 2)$, verificando-se um *gap* de dualidade calculado como:

$$\text{Gap} = f(x^*) - q(\mu^*) = 55 - 50 = 5 \quad (4.70)$$

Por fim, podemos dizer que, o método de feixes encontra, em apenas seis iterações, a solução dual do problema didático proposto, buscando efetivamente o ponto ótimo da função dual sem que ocorram oscilações no processo de solução ou, pelo menos que, as oscilações sejam, naturalmente, descartadas.

4.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentadas as características do problema dual do planejamento da operação de curto prazo mostrado no Capítulo 3, bem como os métodos de otimização não-diferenciável, aplicáveis na sua solução.

Como é mostrado, o problema dual, originário de um problema primal inteiro-misto, é não-diferenciável o que requer métodos adequados de solução. São apresentados três métodos de otimização não-diferenciável: método do subgradiente, método dos planos

cortantes, e o método de feixes, que utilizam informações da função dual e do subgradiente do problema.

No tocante ao método do subgradiente, é visto que não existe um critério que defina sua convergência, ou seja, não há garantia da obtenção do ponto de máximo da função. Além disso, ocorrem oscilações indesejadas e o processo de solução pode levar um número exagerado de iterações.

Com relação ao método dos planos cortantes, é mostrado que existe um critério de convergência bem definido. Porém, este método apresenta instabilidade, como no caso do método do subgradiente, dificultando a convergência até a solução ótima.

Por fim, o método de feixes é apresentado como uma versão estabilizada do método dos planos cortantes, sendo eliminadas as oscilações presentes nos outros métodos, bem como, mantendo-se um critério de convergência independente da existência do gradiente da função. Entretanto, esse método possui a desvantagem de se resolver um problema quadrático a cada nova iteração o que pode dificultar sua aplicação. Porém, a compressão de feixes pode reduzir as dimensões do problema quadrático agilizando sua solução.

Desta forma, uma vez apresentado o desenvolvimento teórico a respeito dos métodos de otimização não-diferenciável, bem como a evolução até o método de feixes, a seguir, esse método é aplicado na solução do problema dual de planejamento da operação de curto prazo.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FEIXES

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é proposta a aplicação do método de feixes descrito no capítulo anterior ao problema da programação operação energética para uma particular configuração hidrotérmica do sistema brasileiro.

Inicialmente, é mostrado o algoritmo do método de feixes, bem como a recuperação da solução primal do problema. Em seguida são apresentados os dados para uma configuração hidrotérmica que é utilizada para testar a metodologia proposta, bem como outros dados necessários nas simulações. Por fim, os resultados obtidos nas simulações são mostrados e analisados.

5.2 ALGORITMO DO MÉTODO DE FEIXES

Conforme visto no Capítulo 3, a atividade de planejamento da operação de curto prazo dá origem a um problema matemático não-convexo, não-linear e de grande porte, cuja solução é viabilizada relaxando o problema primal. Inicialmente, as restrições de demanda e reserva do sistema são relaxadas, obtendo-se os subproblemas termelétrico e hidrelétrico. Posteriormente, o sistema hidrelétrico é decomposto em um subproblema contínuo e em um conjunto de subproblemas inteiros. Este processo de decomposição constitui o problema dual de planejamento da operação de curto prazo, representada por (3.44).

O fluxograma da Figura 5.1 apresenta o algoritmo para o método de feixes aplicado na resolução do Problema Dual (3.44).

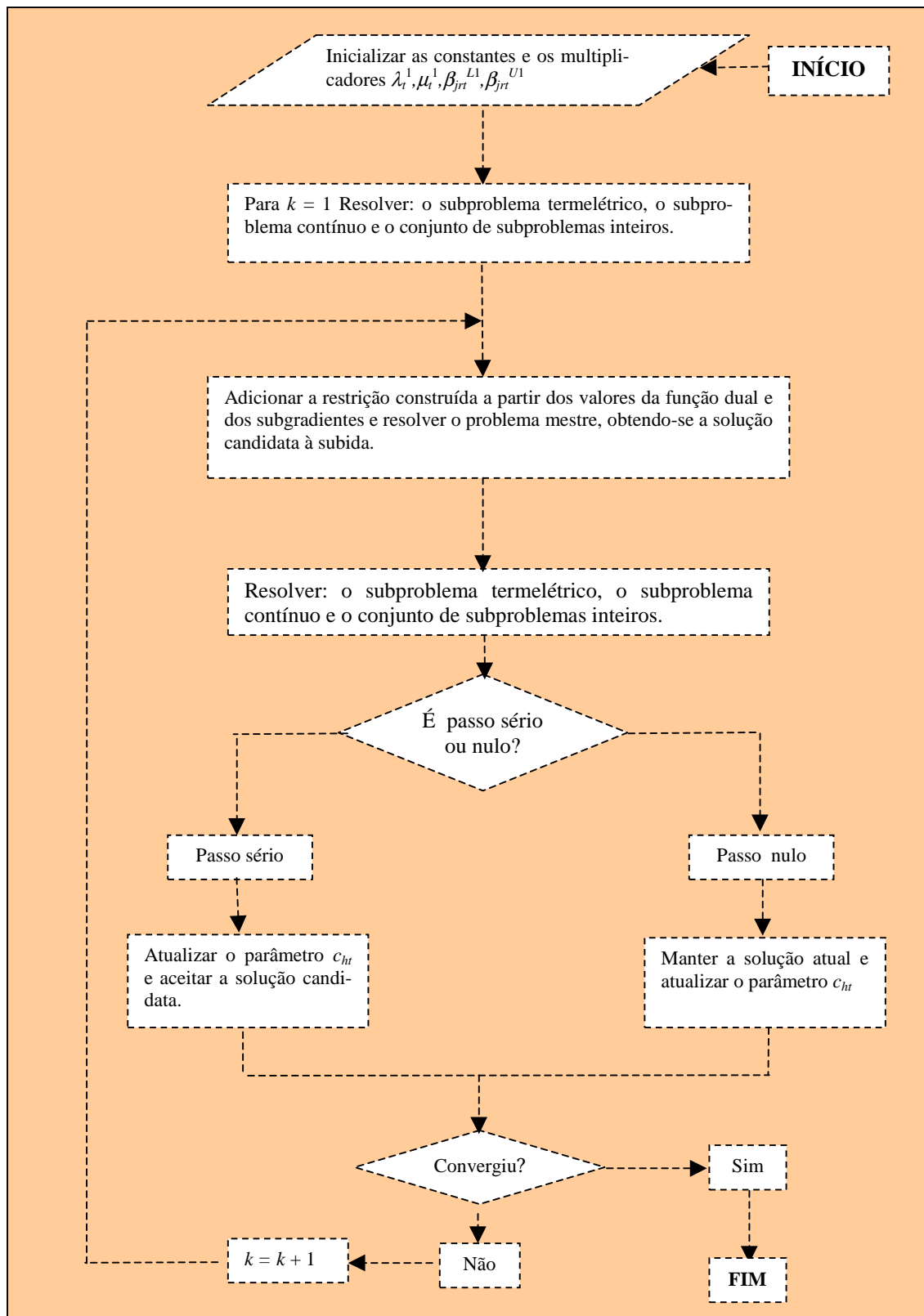


Figura 5.1 – Fluxograma da Aplicação do Método de Feixes.

Nesta figura o problema mestre mencionado se refere a um problema de otimização semelhante ao apresentado em (4.33), construído a partir das seguintes informações: vetor de multiplicadores $\lambda_t, \mu_t, \beta_{jrt}^L$ e β_{jrt}^U ; valor função dual, representada por (3.45); do parâmetro c_{ht} que controla a solução do problema mestre; e do conjunto de subgradientes das restrições de demanda, reserva e dos limites das zonas permitidas, que são obtidos, respectivamente, por:

$$SGD_t = -\sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(\cdot) - \sum_{i=1}^I pt_{it} + D_t \quad t = 1, T \quad (5.1)$$

$$SGR_t = -\sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J(r)} (ph_{jr}^{\max} z_{jrt} - ph_{jrt}(\cdot)) - \sum_{i=1}^I (pt_i^{\max} - pt_{it}) + R_t \quad t = 1, T \quad (5.2)$$

$$SGL_{jrt} = \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\min} - ph_{jrt}(\cdot) \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (5.3)$$

$$SGU_{jrt} = ph_{jrt}(\cdot) - \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} ph_{jkr}^{\max} w_{jkrt} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (5.4)$$

A atualização dos parâmetros c_{ht} é obtida pelas expressões (4.41), (4.42) e (4.43).

5.3 RECUPERAÇÃO DA SOLUÇÃO PRIMAL

Como já mencionado, a solução de problema dual, originário de um problema primal não-convexo, é, muitas vezes, infactível, ou seja, as restrições relaxadas podem não ser atendidas. Desta maneira, existe a necessidade de se recuperar (ajustar) estas restrições para que se obtenha uma solução viável para o problema. Assim, a solução do problema dual obtida pelo algoritmo apresentado na Figura 5.1 não é a solução definitiva, devendo ser posteriormente recuperada, encontrando-se uma solução factível.

Deve estar claro que, a partir desse ponto tem-se uma solução ótima dual obtida na aplicação do método de feixes apresentado no fluxograma da Figura 5.1 e que, associada à mesma, existe a solução primal composta pelo conjunto de variáveis $pt_i, ph_{jrt}(\cdot), z_{jrt}, w_{jkrt}, x_{jrt}$ e α . Entretanto, estas variáveis podem não atender as restrições relaxadas.

A recuperação da solução primal é obtida por meio de heurísticas específicas para cada caso. Estas heurísticas dependem do tipo de restrição que é relaxada e, normalmente,

são realizadas de maneira que se tenha o menor sobre-custo¹ na operação do sistema após a recuperação da solução primal.

No trabalho [40] é apresentada uma metodologia para recuperar a restrição de reserva do sistema termelétrico apresentado, onde a solução final para o problema é chamada de “solução dual factível de reserva”. Em linhas gerais, nessa metodologia os multiplicadores relacionados às restrições de reserva são atualizados fazendo com que outras unidades termelétricas entrem em operação, até que reserva do sistema seja atendida. Em [24] a restrição de reserva também é violada, sendo recuperada por meio de algoritmos que escolhem quais as unidades devem operar para que se atenda a reserva do sistema.

Sem a pretensão desenvolver metodologias sofisticadas de recuperação da solução primal, em nosso trabalho a solução primal factível do problema é obtida recuperando as restrições de reserva, representadas por (3.19), e de limites das zonas permitidas de geração das unidades hidrelétricas, representadas por (3.24).

Para recuperar a restrição de reserva, representada por (3.19), devemos realocar as unidades, ou seja, fazer com que unidades adicionais entrem em operação para os estágios de tempo em que a restrição não é atendida, até obter a factibilidade. A entrada em operação das unidades que estão desligadas não obedece a critérios específicos, sendo escolhidas aleatoriamente, uma vez que o estudo mais aprofundado da recuperação das restrições foge ao escopo deste trabalho.

A recuperação das restrições de limites das zonas permitidas de geração é realizada fixando as variáveis inteiras, a partir da solução final do problema dual. Desta forma, podemos reescrever a seguinte restrição para os limites de potência das unidades hidrelétricas:

$$\sum_{k=1}^{\Phi_j} ph_{jkt}^{min} \hat{w}_{jkt} \leq ph_{jt} \leq \sum_{k=1}^{\Phi_j} ph_{jkt}^{max} \hat{w}_{jkt} \quad j = 1, J(r) \quad r = 1, R \quad t = 1, T \quad (5.5)$$

onde,

\hat{w}_{jkt} é o valor fixo para a variável w_{jkt} após a solução do problema dual.

Finalmente, a solução primal factível é obtida por um redespacho ótimo das unidades geradoras, considerando a Restrição de potência (5.5), onde são obtidos os custos mar-

¹ Uma vez a solução originalmente encontrada é de menor custo. Portanto, qualquer solução diferente da original aumenta o custo de operação.

ginais de operação (CMO) do sistema, atendendo a restrição de demanda, representada por (3.18). Desta forma, o *gap* de dualidade hidrotérmico prático pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$gap_{HT} = P_{HT}^{rec} - \Theta_{HT} \quad (5.6)$$

onde,

P_{HT}^{rec} é o valor da função primal hidrotérmica após a recuperação das restrições, ou seja, o custo total para uma operação factível do sistema.

5.4 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA EXEMPLO

A metodologia apresentada neste trabalho é aplicada planejamento da operação de curto-prazo para uma configuração hidrotérmica que representa as unidades hidrelétricas individualmente. No tocante ao sistema termelétrico, a representação é feita de maneira simplificada. Os dados relacionados com o sistema hidrotérmico são apresentados adiante.

5.4.1 Configuração Hidrotérmica

A configuração hidrotérmica utilizada, mostrada na Figura 5.2, é composta por 4 usinas hidrelétricas e 1 usina termelétrica, sendo que cada usina hidrelétrica é composta por 4 unidades geradoras.

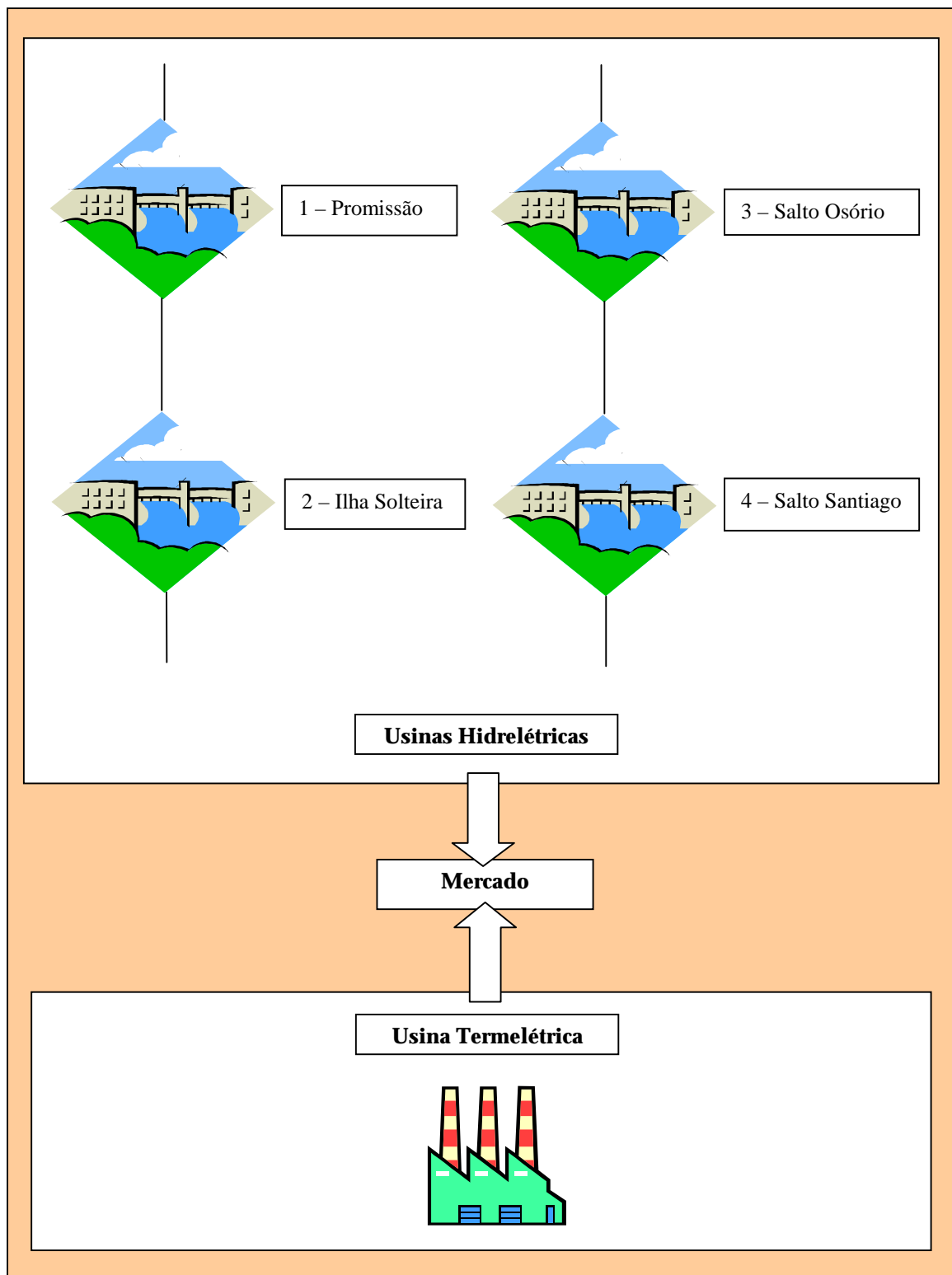


Figura 5.2 – Configuração Hidrotérmica Utilizada.

Na Tabela 5.1 estão descritos os dados relacionados com as principais características operativas das usinas e das unidades geradoras para a configuração hidrelétrica teste.

Tabela 5.1 – Dados Principais do Sistema Hidrelétrico.

Usina	Unidade	Coeficientes da Função de Produção			Limites Operativos da Unidade				Limites Operativos da Usina		
	N ^O	e_0 [MW]	e_1 $\left[\frac{MW}{m^3 / s} \right]$	e_2 $\left[\frac{MW}{(m^3 / s)^2} \right]$	Zonas Permitidas [MW]				Volume do Reservatório [hm ³]		
					Mín ₁	Máx ₁	Mín ₂	Máx ₂	Mín	Máx	
Promissão	1	1	-20	0,307	-1,43·10 ⁻⁴	0	20	40	90	5.280	7.408
		2	-20	0,307	-1,43·10 ⁻⁴	0	20	40	90		
		3	-18	0,280	-1,13·10 ⁻⁴	0	25	50	90		
		4	-18	0,280	-1,13·10 ⁻⁴	0	25	50	90		
Ilha Solteira	2	1	-30	0,539	-2,24·10 ⁻⁴	15	60	90	170	8.232	21.060
		2	-30	0,539	-2,24·10 ⁻⁴	15	60	90	170		
		3	-30	0,536	-2,40·10 ⁻⁴	20	70	100	170		
		4	-30	0,536	-2,40·10 ⁻⁴	20	70	100	170		
Salto Osório	3	1	-40	0,876	-4,27·10 ⁻⁴	81	173	-	-	1.014	1.124
		2	-40	0,876	-4,27·10 ⁻⁴	81	173	-	-		
		3	-40	0,876	-4,27·10 ⁻⁴	81	173	-	-		
		4	-40	0,876	-4,27·10 ⁻⁴	81	173	-	-		
Salto Santiago	4	1	-45	1,147	-4,07·10 ⁻⁴	30	130	200	330	2.662	6.772
		2	-45	1,147	-4,07·10 ⁻⁴	30	130	200	330		
		3	-40	1,260	-5,80·10 ⁻⁴	30	150	240	340		
		4	-40	1,260	-5,80·10 ⁻⁴	30	150	240	340		

Os coeficientes da função de produção das unidades hidrelétricas, apresentadas na Tabela 5.1, referem-se a uma altura de queda líquida calculada para um volume igual à média entre o volume máximo e o mínimo operativo do reservatório. Esse volume é conhecido no início do horizonte de planejamento, sendo utilizado também na definição dos limites das zonas permitidas de geração.

Para a usina de hidrelétrica de Salto Santiago, os coeficientes de produção das unidades 3 e 4 não correspondem à realidade, e foram definidos de modo que se tenham unidades diferentes umas das outras, e assim melhor ilustrar a aplicação do método proposto.

A função de custo futuro, representada por (3.30), para o sistema hidrelétrico utilizado nas simulações é constituída de um único segmento de reta, cujos dados relacionados à mesma são apresentados na Tabela 5.2, a seguir.

Tabela 5.2 – Dados da Função de Custo Futuro.

π_1 [\$/hm ³]	π_2 [\$/hm ³]	π_3 [\$/hm ³]	π_4 [\$/hm ³]	C_{TOTAL} [\$]
8.800	6.600	10.500	6.700	1,993×10 ⁸

Diferentemente do que é feito para modelos de longo prazo, as afluições incrementais que chegam nos reservatórios das usinas podem ser consideradas constantes durante todo o horizonte de planejamento. Em nosso trabalho o horizonte de planejamento é de 24 horas e as afluições para cada usina do sistema, são mostradas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Dados de Afluições em m³/s para as Usinas Hidrelétricas.

Hora / Usina	1	2	3	4
1 a 24	1.200	3.500	1.160	1.100

Os períodos de mínimos *uptime* e *downtime* considerados são de 3 horas para todas as unidades hidrelétricas do sistema. O tempo de viagem da água entre os reservatórios é também de 3 horas.

Como condições iniciais para todas as unidades hidrelétricas, define-se que as mesmas estão ligadas por um intervalo de tempo superior ao mínimo *uptime* nos estágios imediatamente anteriores ao início da programação.

Na Tabela 5.4 são apresentados os dados relacionados com as características operativas da usina termelétrica utilizada nas simulações.

Tabela 5.4 – Dados da Usina Termelétrica

Usina	Coeficientes da Função de Custos			Limites de potência [MW]	
	a_0 [US\$]	a_1 [US\$/MWh]	a_2 [US\$/MWh ²]	Mínimo	Máximo
1	0	40	5×10 ⁻³	0	100

5.4.2 Dados da Simulação

A demanda de energia elétrica utilizada nas simulações varia a cada hora, no horizonte de planejamento. Essa demanda é apresentada na forma de curva de carga que representam o comportamento do consumo diário de energia.

O sistema apresentado na Figura 5.2 é testado para curvas de carga típicas da região Sul do Brasil [41] em duas situações distintas: uma que representa dias úteis da semana; e outra representando os fins de semana. Estas curvas são mostradas, respectivamente, nas figuras 5.3 e 5.4.

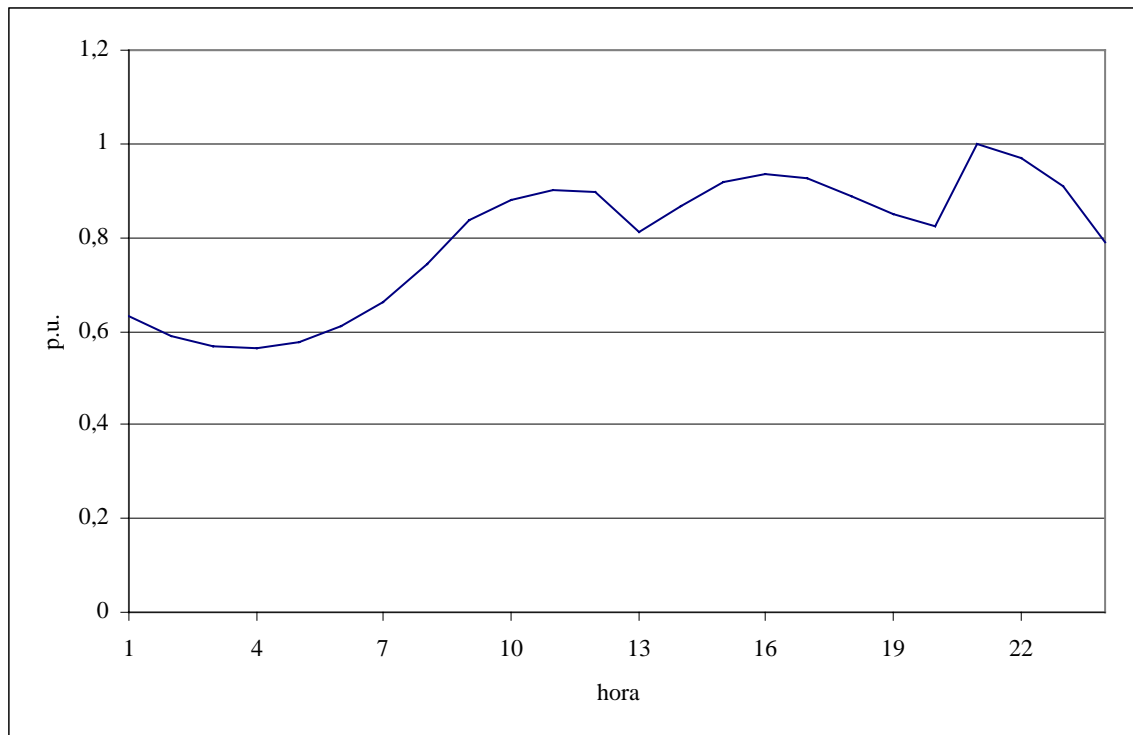


Figura 5.3 – Curva de Carga 1 – Dias Úteis.

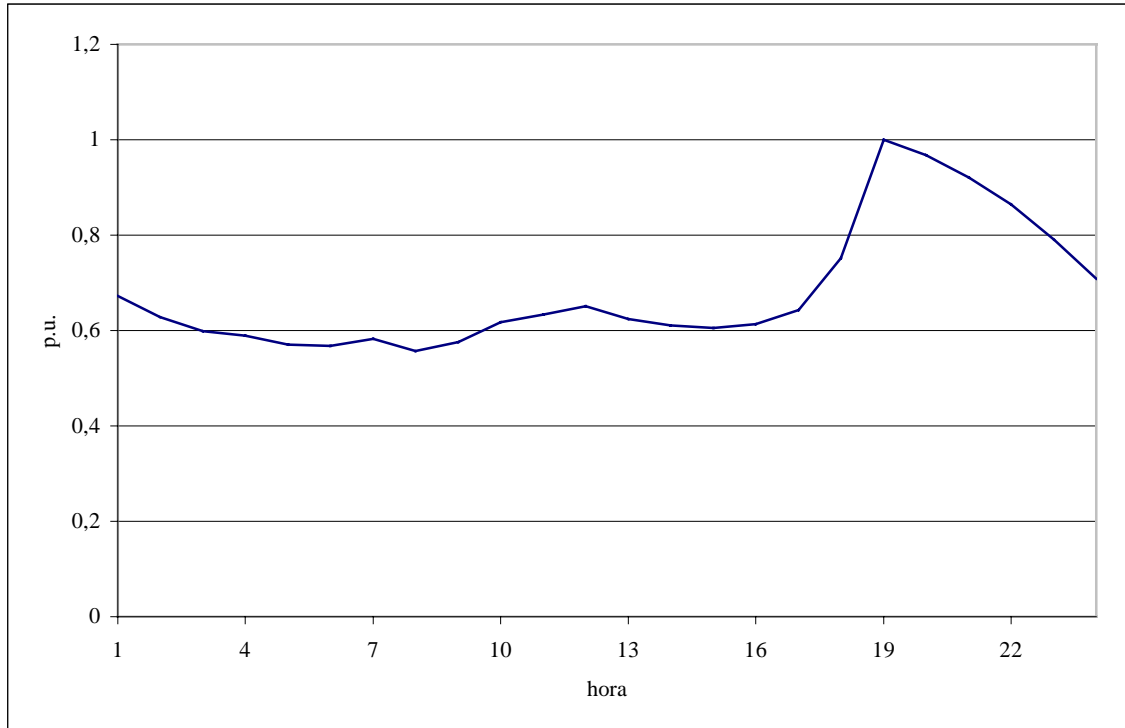


Figura 5.4 – Curva de Carga 2 – Fins de Semana.

O consumo de energia elétrica apresentada nas figuras 5.3 e 5.4 é expresso por unidades da demanda máxima, que representa 1 p.u. Para a curva da Figura 5.3 a demanda máxima (2.822MW) equivale a 90% da potência instalada (3.135 MW) do sistema. Para a Figura 5.4 é equivalente a 80% da mesma ou 2.508 MW. A reserva girante para o sistema é de 10% da demanda para cada estágio do horizonte de planejamento.

Conforme mostrada na Figura 5.1, a metodologia proposta para solução do problema necessita de um ponto de partida para iniciar as variáveis duais (multiplicadores). Desta maneira, o vetor de multiplicadores λ , que correspondem ao custo marginal de operação, são inicializados a partir de um despacho econômico das unidades geradoras que pertencem ao sistema. Já a inicialização do vetor dos multiplicadores de reserva é feita sem critério específicos e definida a seguir:

$$\mu_t = 2 \quad t = 1, \dots, T \quad (5.6)$$

Os multiplicadores iniciais β^L e β^U tem dimensão $[(J(r) \text{ com } r \in R) \times T]$ e são definidos sem critério específicos por:

$$\beta_{jt}^L = 10 \quad j = 1, \dots, J(r) \quad r = 1, \dots, R \quad t = 1, \dots, T \quad (5.7)$$

$$\beta_{jt}^U = 5 \quad j = 1, \dots, J(r) \quad r = 1, \dots, R \quad t = 1, \dots, T \quad (5.8)$$

A constante ε , representada em (4.32), que determina a convergência do algoritmo do método de feixes vale 1×10^{-2} .

5.5 OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA

A otimização da operação energética para o sistema hidrotérmico da Figura 5.2 é obtida pela aplicação do algoritmo do método de feixes e pela recuperação da solução primal conforme descrito nas seções 5.2 e 5.3, respectivamente.

O programa foi executado em ambiente *Windows*, utilizando um computador pessoal com processador Duron de 1.0 GHz. A linguagem de programação utilizada na codificação do algoritmo foi a AMPL (*A Modeling Language For Mathematical Programming*) e o *software* de otimização empregado na resolução dos problemas de otimização é o ILOG CPLEX 7.1.

5.5.1 Resultados Para Curva de Carga 1 – Dias Úteis

Para um mercado que acompanha a curva de carga da Figura 5.3 o valor máximo obtido para a solução do Problema dual (3.44), apresentado no Capítulo 3 é de \$747.848,68, cujo processo de convergência do método de feixes é apresentado na Figura 5.5.

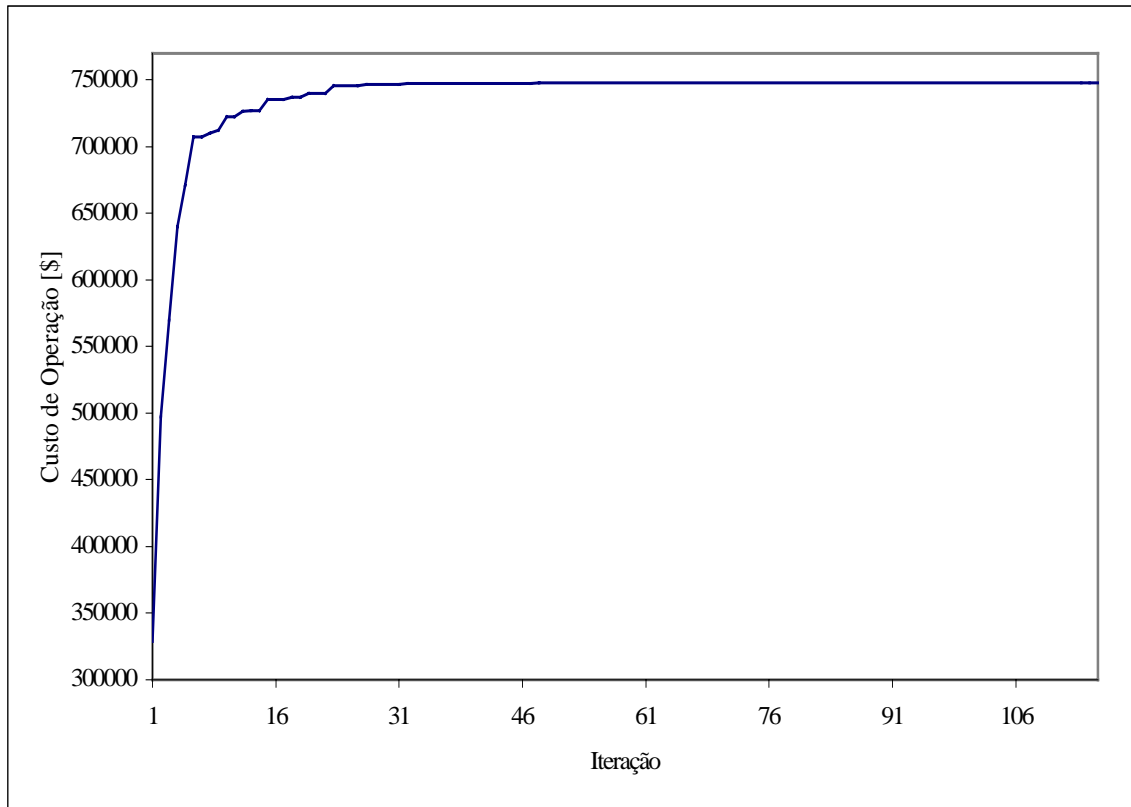


Figura 5.5 – Convergência do Problema Dual.

Na Figura 5.5 pode-se observar que a convergência do problema é obtida em 116 iterações, onde o tempo computacional necessário é de 17 minutos e 12 segundos para atingir o ponto de máximo. Do total das iterações processadas, 55 são passos nulos e 61 são passos sérios.

Uma vez obtida a solução do problema dual, procede-se na recuperação da solução primal do problema hidrotérmico, conforme apresentado na Seção 5.3. Assim, o custo total para a operação do sistema (valor da função primal), após a recuperação das restrições, é de \$749.740,88, onde o *gap* de dualidade prático é obtido pela Expressão 5.5:

$$gap = 749.740,88 - 747.848,68 = \$1.892,20 \quad (5.9)$$

O *gap* calculado em (5.9) corresponde a 0,25 % do valor da função primal P_{HT}^{rec} .

A Tabela 5.5 a seguir mostra o custo marginal de operação e o custo da reserva, representados, respectivamente, por meio dos multiplicadores λ e μ .

Tabela 5.5 – Custo Marginal do Sistema e Custo da Reserva.

Custo/Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ	26,53	25,68	26,06	27,74	25,45	26,10	27,30	28,63	40,68	41,48	49,84	45,04
μ	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,56	0,00	0,38	0,03

Custo/Hora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
λ	37,27	41,39	43,17	48,84	49,93	45,28	40,38	38,41	62,91	51,50	48,83	34,29
μ	0,31	0,61	0,00	0,00	0,00	1,47	0,00	0,00	1,24	0,00	0,00	0,00

As figuras 5.6 a 5.9 apresentam a potência de saída das unidades hidrelétricas que compõem o sistema.

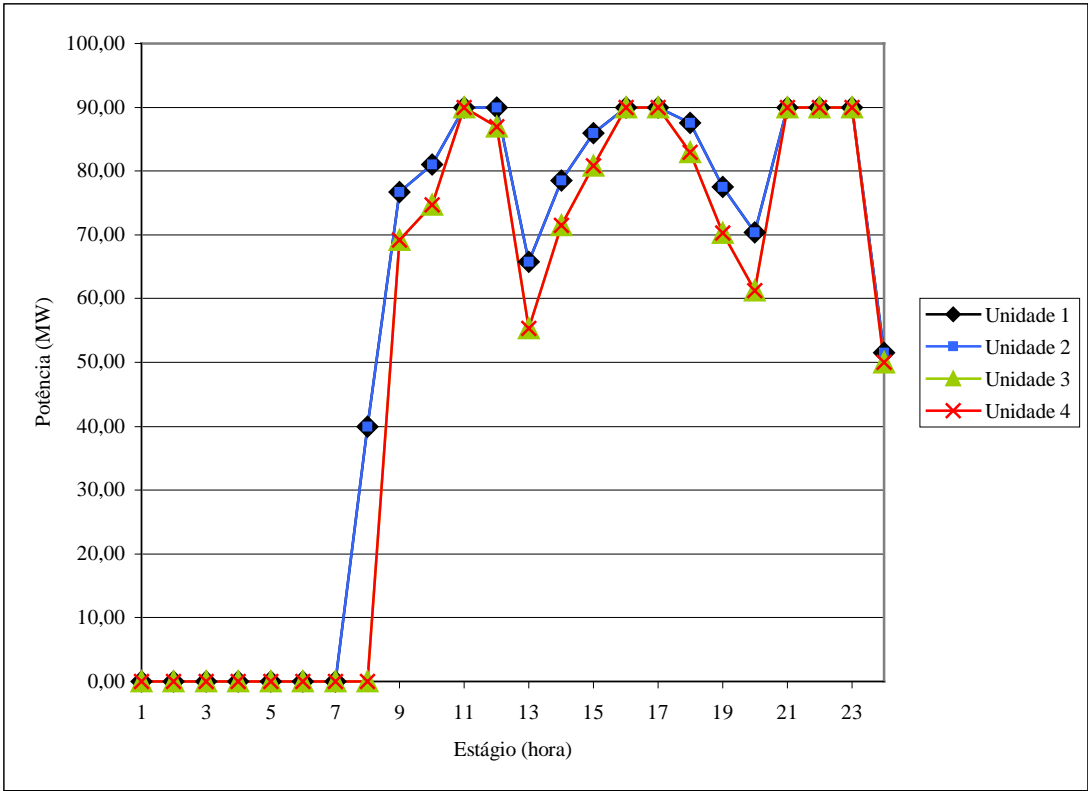


Figura 5.6 – Potência de Saída das Unidades da Usina de Promissão.

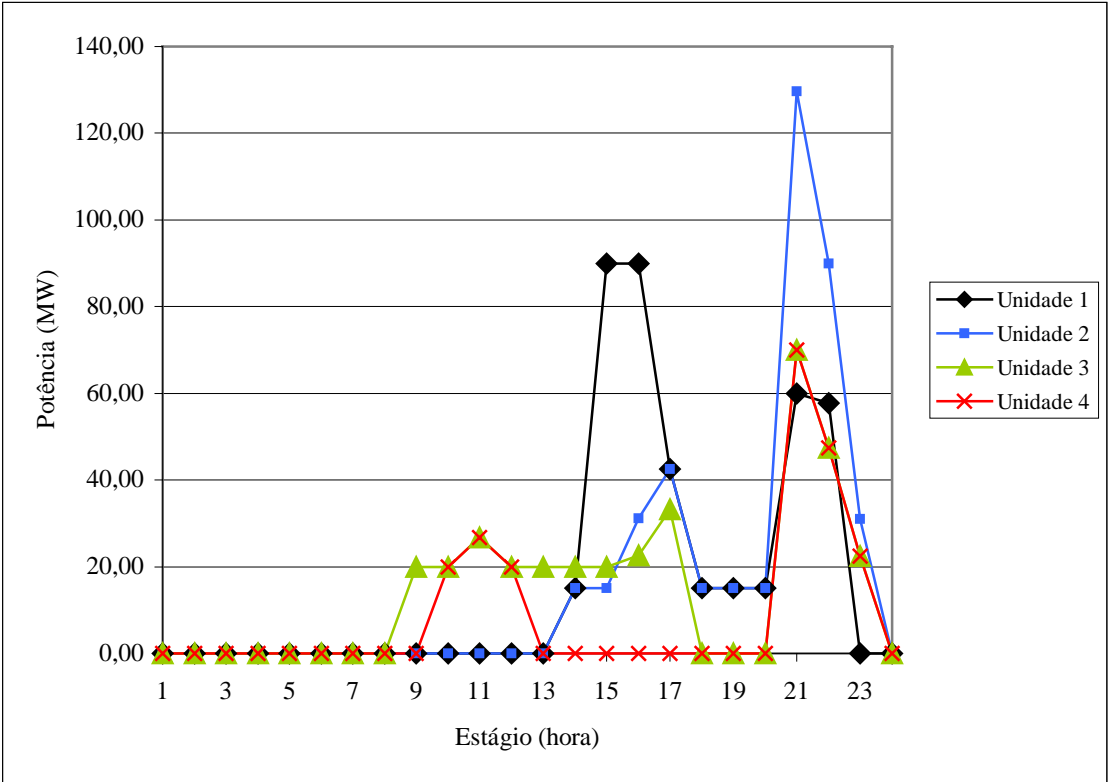


Figura 5.7 - Potência de Saída das Unidades da Usina de Ilha Solteira.

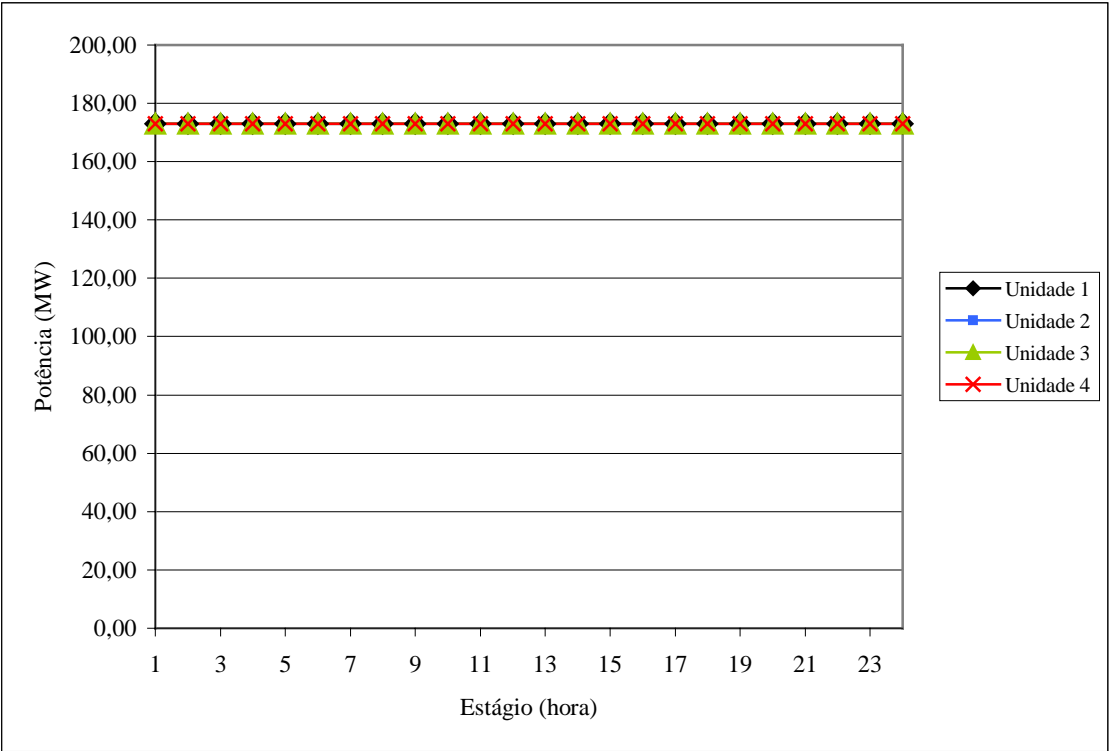


Figura 5.8 – Potência de Saída das Unidades da Usina de Salto Osório.

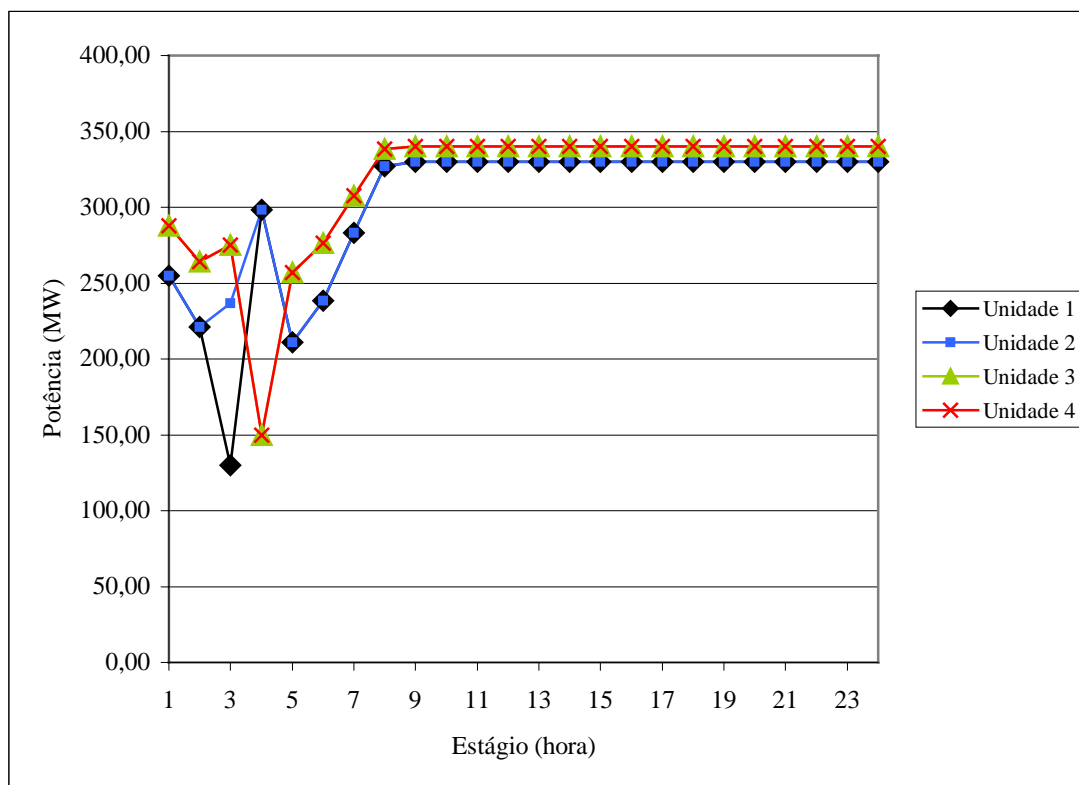


Figura 5.9 – Potência de Saída das Unidades de Salto Santiago.

A Tabela 5.6 mostra a potência de saída da usina termelétrica para o horizonte de planejamento.

Tabela 5.6 – Potência de Saída da Usina Termelétrica.

Usina/Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	12,7	100,0	100,0	100,0

Usina/Hora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0,0	67,6	100,0	100,0	100,0	100,0	38,4	0,0	100,0	100,0	100,0	0,0

Analisando as figuras 5.6 a 5.9 e a Tabela 5.6 verifica-se que, por exemplo, no estágio 10 a unidade termelétrica é despachada no máximo, enquanto as unidades hidrelétricas das usinas de Promissão e Ilha Solteira não atingem sua geração máxima. Isso ocorre pois o custo marginal dessas unidades hidrelétricas é superior ao custo da unidade termelétrica, devido à informação de preço da água nos reservatórios fornecida pela função de custo futuro da água, ou seja, o valor da água é maior que o custo de produção termelétrica.

As tabelas 5.7 a 5.10 apresentam o *unit commitment* hidrelétrico, onde: 0 representa unidade desligada; 1 representa unidade operando na zona permitida 1; 2 informa se a unidade está operando na zona permitida 2.

Tabela 5.10 – Alocação das Unidades da Usina de Salto Santiago.

Unidade/Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
4	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2

Unidade/Hora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Os resultados apresentados até aqui estão relacionados com a solução factível do problema, uma vez que, a solução primal após a maximização da função dual não atende as restrições relaxadas.

Retornando à solução violada verifica-se que o requisito de reserva, nos estágios 9, 13, 15, 16 e 17 de planejamento, não é atendido. Para recuperar estas restrições deve-se alocar unidades geradoras adicionais que estão desligadas nestes estágios. Em uma análise preliminar dos resultados primais, obtidos após a solução do problema dual, observa-se que existem unidades fora de operação, nos referidos estágios, apenas na usina de Ilha Solteira conforme mostrado na Tabela 5.11.

Tabela 5.11 – Alocação das Unidades da Usina de Ilha Solteira – Infactível.

Unidade/Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Unidade/Hora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	1	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0
2	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Nesta tabela verifica-se que a unidade 3 da usina está desligada em todos os estágios em que a reserva não é atendida. Desta maneira, essa unidade é escolhida para entrar em

operação nos estágios 9, 13, 15, 16 e 17. Adicionalmente, a unidade 3 é mantida em operação no estágio 14, de maneira que a restrição de mínimo *uptime* seja respeitada.

No tocante a violação das restrições de limites das zonas permitida de geração, a Figura 5.10 apresenta a potência de saída das unidades da usina de Promissão após a solução do problema dual.

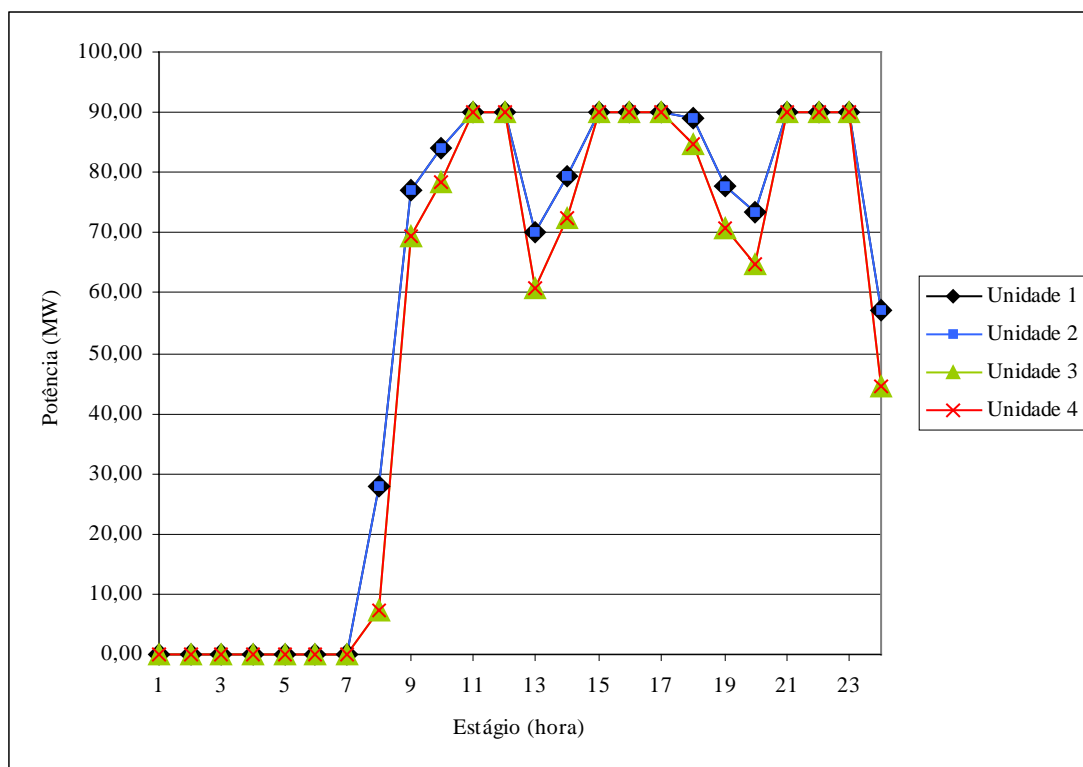


Figura 5.10 – Potência de Saída das Unidades de Promissão – Infactível.

Na Figura 5.10 observa-se que, para as unidades 1 e 2, ocorre violação dos limites das zonas permitidas no estágio 8, ou seja, as unidades apresentam potência de saída (27,84 MW) dentro da região em que não podem operar. Para as unidades 3 e 4 a violação dos limites das zonas permitidas acontece no estágio 24 onde a potência de saída das unidades é 44,38 MW. A potência de saída destas unidades, com seus respectivos ajustes, são apresentados na Figura 5.6.

Além das unidades de Promissão, as unidades de outras usinas também sofreram violação nas suas zonas permitidas de geração e tiveram sua potência de saída ajustada.

Os resultados relacionados com os volumes dos reservatórios não são apresentados, pois não houve alteração significativa em seus valores.

5.5.2 Resultados Para Curva de Carga 2 – Fins de Semana

A seguir, para a situação da curva de carga 2, apresentada na Figura 5.4, são mostrados os resultados obtidos nas simulações.

Uma vez aplicado o método de feixes a convergência é obtida em 80 iterações (35 passos nulos 45 passos sérios) atingindo o máximo para a função dual, representado por (3.45), em \$ 258.982,33, conforme apresentado na Figura 5.11. O tempo necessário para realizar essas 80 iterações foi de 6 minutos e 10 segundos.

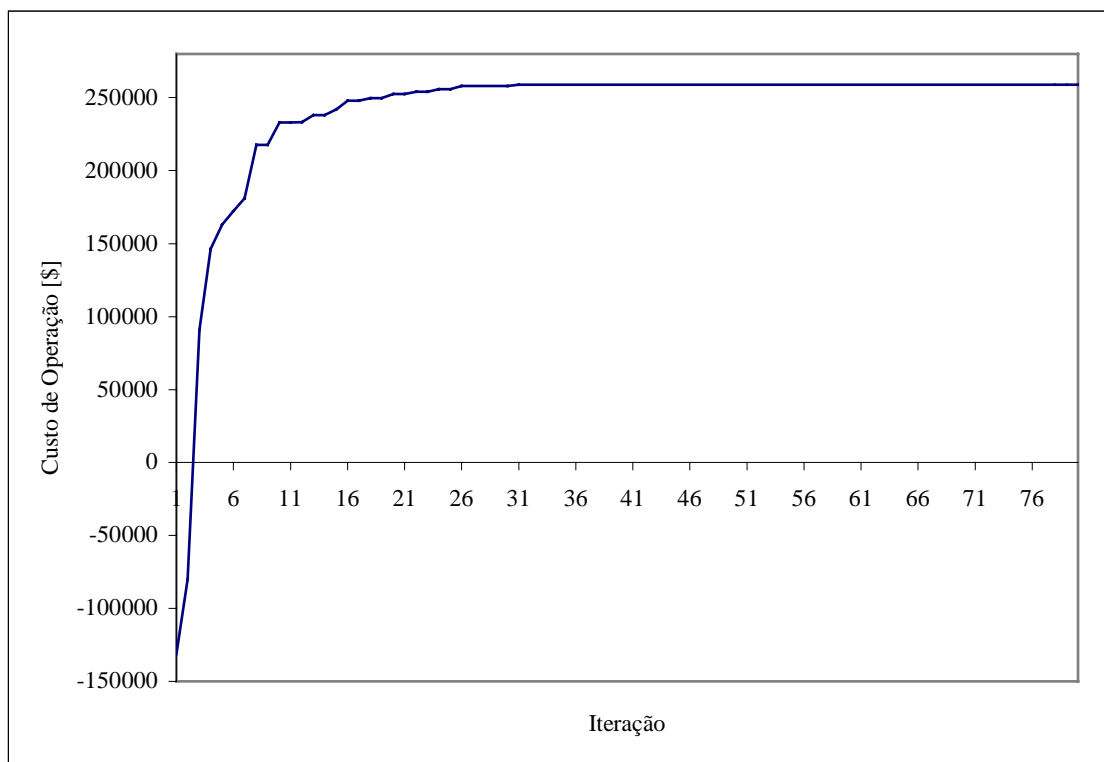


Figura 5.11 – Convergência do Problema Dual.

A Figura 5.12 a seguir apresenta o comportamento da medida de progresso (critério de convergência), calculada por (4.38), quando o sistema atende a curva de carga 2.

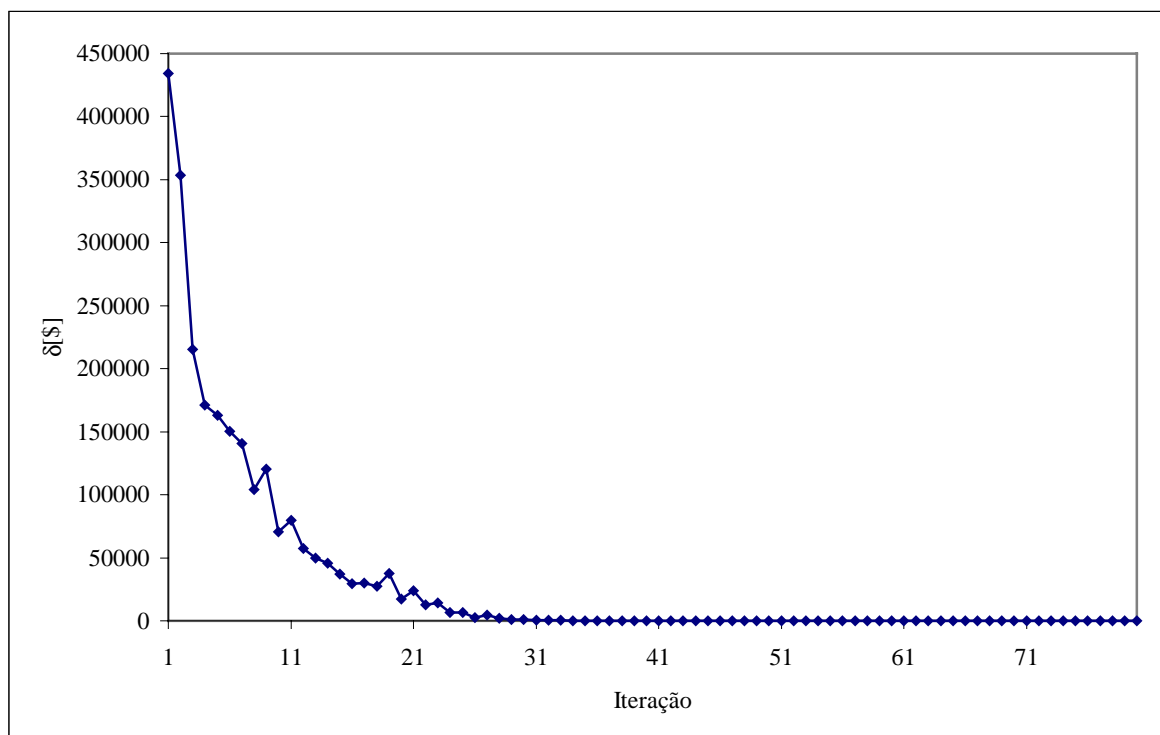


Figura 5.12 – Medida de Progresso.

Recuperando a solução primal como descrito na Seção 5.3, o custo total de operação factível do sistema é de \$ 262.772,82, onde o *gap* de dualidade hidrotérmico pode ser calculado utilizando-se a Expressão (5.5):

$$gap_{HT} = 262.772,82 - 258.982,33 = \$3.790,49 \quad (5.10)$$

que corresponde a 1,44 % do valor da função primal recuperada P_{HT}^{rec} .

O custo marginal do sistema e o custo da reserva para operação do sistema são mostrados na Tabela 5.12.

Tabela 5.12 – Custo Marginal do Sistema e Custo da Reserva.

Custo/Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ	26,92	24,95	26,02	26,21	24,29	20,03	20,36	23,44	25,10	21,29	27,77	28,42
μ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Custo/Hora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
λ	21,44	26,61	26,38	21,18	25,34	27,40	45,94	40,66	40,43	40,48	28,15	26,53
μ	0	0	0	0	0	0	1,57	0	0	0	0	0

A Tabela 5.13 a seguir mostra a evolução do custo marginal e do custo da reserva do sistema para o estágio 19, no o qual a restrição de reserva está ativa. Com o objetivo de

reduzir a quantidade de informação, são apresentados somente os valores correspondentes as iterações de números pares.

Tabela 5.13 – Evolução dos Custos do Sistema Durante o Processo de Solução do Problema Dual.

Custo/Iteração	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
λ_{19}	44,014	38,807	65,538	59,58	54,482	45,592	41,796	46,638	50,913	47,328
μ_{19}	0	0	0	0	0	3,417	0	0	0	2,346
Custo/Iteração	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
λ_{19}	46,322	46,861	47,154	47,154	47,292	46,883	46,883	47,438	47,697	47,363
μ_{19}	0	0,295	1,5	1,5	0	1,218	1,218	1,291	1,282	1,324
Custo/Iteração	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
λ_{19}	46,438	46,538	46,538	46,538	46,777	47,05	46,987	46,827	46,827	46,793
μ_{19}	1,485	1,529	1,529	1,529	1,508	1,548	1,546	1,528	1,528	1,536
Custo/Iteração	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80
λ_{19}	46,756	46,704	46,65	46,645	46,606	46,606	46,606	46,603	46,596	46,576
μ_{19}	1,541	1,544	1,551	1,556	1,563	1,563	1,563	1,563	1,563	1,565

Cabe observar que o custo marginal λ_{19} apresentado na Tabela 5.12 corresponde à operação factível do sistema. Assim, este custo não será necessariamente igual ao obtido na solução do problema dual mostrado na Tabela 5.13.

Conforme pode se verificar nos resultados para a curva de carga 1, a solução para unidades de uma mesma usina é muito semelhante. Assim, selecionamos a unidade 1 de cada usina como representativa da usina, portanto na Figura 5.13 e na Tabela 5.14 são apresentados, respectivamente, a potência de saída e a alocação da unidade 1 de cada usina hidrelétrica do sistema.

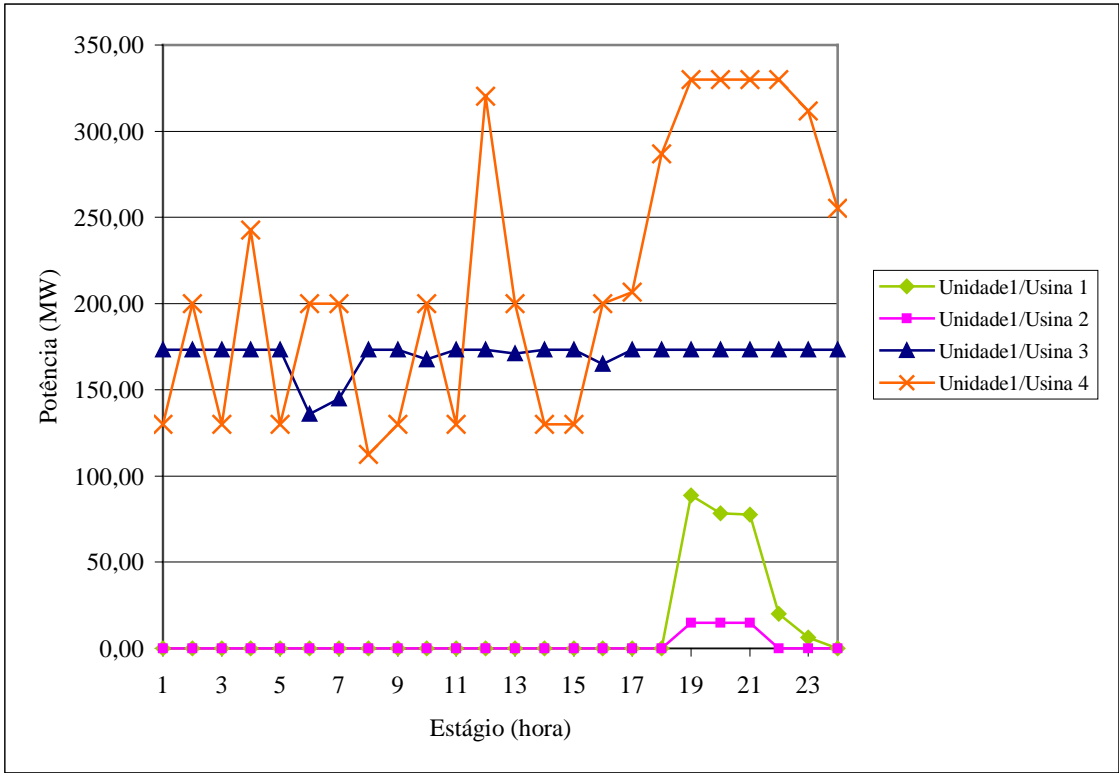


Figura 5.13 – Potência de Saída da Unidade 1 das Usinas Hidrelétricas.

Tabela 5.14 – Alocação Para a Unidade 1 das Usinas Hidrelétricas.

Usina/Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	1	2	1	2	2	1	1	2	1	2

Usina/Hora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	0	0	0	0	0	2	2	2	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Com o objetivo de ilustrar a eficiência do modelo apresentado em nosso trabalho, que considera as zonas proibidas de geração, a Figura 5.14 apresenta, para a curva de carga 2, uma comparação entre a potência de saída da Unidade 4 de Salto Santiago (Usina 4), utilizando o modelo descrito no Capítulo 3, e a mesma grandeza encontrada a partir de um despacho econômico.

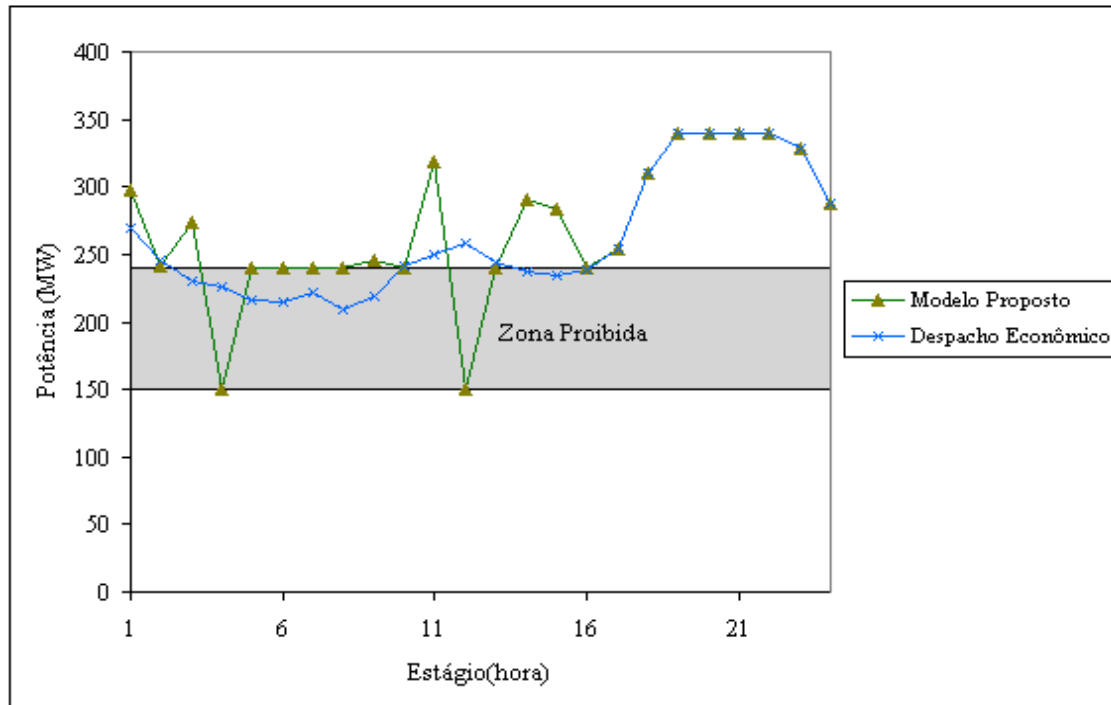


Figura 5.14 – Comparação Entre, Despacho Econômico e o Modelo Proposto.

Pela Figura 5.14 pode-se verificar que a unidade em questão não é despachada na sua zona proibida de geração, evitando custos operativos adicionais.

No tocante aos tempos computacionais, verifica-se que a solução do problema, quando o sistema atende a curva de carga 1, é mais demorada em comparação a situação de curva de carga 2. Este fato está relacionado à dificuldade de solução do problema dual devido, principalmente, ao atendimento a restrição de reserva, a qual é muito mais solicitada na primeira situação, isto pode ser observado quando comparamos os resultados de μ nas tabelas 5.5 e 5.12.

Os tempos de processamento relativos à recuperação da solução primal são bem inferiores ao tempo necessários para a maximização da função dual.

5.6 CONCLUSÕES

Neste capítulo é apresentada a metodologia de solução do problema dual de planejamento da operação de curto prazo, que inclui a aplicação do método de feixes na maximização da função dual e a recuperação da solução primal do problema.

A metodologia é testada para uma configuração hidrotérmica composta por quatro usinas hidrelétricas, cada uma delas com quatro unidades geradoras, e uma usina termelétrica.

trica, que deve atender a duas situações distintas de curva de carga, uma que representa os dias úteis da semana e outra que caracteriza os fins de semana.

Analisando os resultados relativos ao processo de convergência do método de feixes verifica-se que o ponto de máximo do problema é alcançado sem a ocorrência de oscilações, para tempos computacionais razoáveis, em todas as situações que o sistema foi testado.

Desta forma, o método de feixes mostra-se um recurso de otimização matemática promissor para solução de problema dual não-diferenciável de grande porte, como o caso do planejamento da operação de curto prazo.

Para o *unit commitment* hidrelétrico, considerando a curva de carga 2, que representa um dia típico de domingo, é interessante perceber que a maioria das unidades está fora de operação durante quase todo o horizonte de planejamento.

Como mostrado neste capítulo, as zonas proibidas de geração e os mínimos *uptime* e *downtime* das unidades hidrelétricas são respeitados evitando sobre-custo na operação do sistema hidrotérmico, para ambas as curvas de cargas.

Adicionalmente, o problema de *unit commitment*, considerando a influência da altura de queda líquida para a função de produção das unidades hidrelétricas, deve ser melhor explorado, fato este que pode influenciar nos resultados do problema.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Este trabalho está centrado no tratamento do problema do *unit commitment* hidrelétrico no contexto do planejamento da operação de curto prazo. Conforme apresentado, esta etapa do planejamento constitui parte da cadeia de modelos disponíveis para otimização centralizada dos sistemas hidrotérmicos.

O planejamento da operação de curto prazo tem por princípio fornecer um programa de geração para todas as unidades que compõe o sistema para um menor custo de operação possível, em um determinado horizonte de tempo. Com base na previsão de demanda e no requisito de reserva de potência, o modelo proposto determina, a cada hora do dia, o estado de cada unidade geradora: ligada ou desligada e o respectivo nível de geração, observando as restrições operativas das unidades individualmente e do sistema também.

No Capítulo 2, são descritos os principais conceitos relativos à atividade do *unit commitment* termelétrico e hidrelétrico que constitui o problema de planejamento da operação de curto prazo.

No tocante ao *unit commitment* para o sistema termelétrico, são tratados os aspectos relativos às características dinâmicas das unidades termelétricas, bem como sua representação neste tipo de problema.

Com relação ao *unit commitment* hidrelétrico, são apresentadas as características das unidades hidrelétricas, o que requer a introdução de restrições, que evitam sobre-custos na operação destas unidades. A função de produção, que representa as unidades hidrelétricas, é detalhada e o custo de gerar energia por meio das unidades é expresso pela função de custo futura da água.

A partir destas informações, no Capítulo 3, o modelo matemático do planejamento da operação de curto prazo é formulado, onde o sistema termelétrico é representado de forma simplificada desconsiderando as características dinâmicas das suas unidades e o sis-

tema hidrelétrico é modelado de maneira detalhada, devido ao nosso interesse neste tipo de fonte de produção de energia elétrica.

O modelo do *unit commitment* hidrelétrico considera as restrições de mínimos *up-time* e *downtime*, limites de potência relacionados às zonas proibidas de geração e o custo de partida das unidades hidrelétricas, em adição às restrições comuns aos modelos hidrelétricos, tais como: restrição de conservação de água nos reservatórios, restrição de custo futuro e limites de volume dos reservatórios. Desta forma, a partir da representação detalhada das unidades hidrelétricas é possível obter maior eficiência no processo de produção de energia elétrica.

A modelagem do problema de planejamento proposto se caracteriza pela não-convexidade, não-linearidade e por ser de grande porte. A primeira característica é garantida pela presença de variáveis inteiras que representam o estado das unidades hidrelétricas, bem como pela função de produção dessas unidades. A não-linearidade ocorre devido à função de produção das unidades hidrelétricas e da função de custo das unidades termelétricas. O grande porte surge devido à grande quantidade de unidades presente nos sistemas de potência.

A presença dessas características torna o problema de planejamento da operação de curto prazo de difícil solução, o que sugere o uso de métodos de decomposição que possibilitem a resolução eficiente do problema.

Baseando-se na Relaxação Lagrangeana, o problema primal é decomposto em dois subproblemas independentes: um subproblema termelétrico e outro subproblema hidrelétrico.

O subproblema hidrelétrico, por sua vez, é decomposto em subproblema de variáveis contínuas e um conjunto de subproblemas de variáveis inteiras.

No Capítulo 4 é mostrado que a maximização da função dual é obtida por métodos de otimização não-diferenciável dentre os quais estão: método do subgradiente, método dos planos cortantes e método de feixes. Esses métodos estão baseados na informação do subgradiente como direção de subida para o processo de solução do problema dual.

No tocante ao método do subgradiente, é visto que não existe um critério de convergência, ou seja, não há garantia da obtenção do ponto de máximo da função. Além disso, ocorrem oscilações indesejadas e o processo de solução pode levar um número exagerado de iterações. Com relação ao método dos planos cortantes, é mostrado que existe um

critério de convergência bem definido. Porém, este método apresenta instabilidade, como no caso do método do subgradiente, dificultando a convergência até a solução ótima.

O método de feixes é apresentado como uma versão estabilizada do método dos planos cortantes, sendo eliminadas as oscilações presentes nos outros métodos, bem como mantendo-se um critério de convergência independente da existência do gradiente da função. Entretanto, este método apresenta a desvantagens de se resolver um problema quadrático a cada nova iteração.

No Capítulo 5, com o intuito de testar a metodologia de decomposição proposta, o método de feixes é aplicado na maximização da função dual do problema de planejamento da operação de curto prazo. Adicionalmente, a operação factível do sistema é viabilizada pela recuperação da solução primal do problema.

Na aplicação proposta, utilizam-se duas situações distintas de curva de carga: uma que representa os dias úteis da semana, e outra que caracteriza os dias fins de semana.

A partir dos resultados obtidos pode se verificar que, para ambas as curvas de carga testadas, o ponto de máximo é efetivamente alcançado pelo método de feixes sem que ocorram oscilações no processo de solução e para tempos computacionais razoáveis.

Desta maneira, o método de feixes mostra ser um recurso de otimização matemática promissor para a solução de problema dual não-diferenciável de grande porte, como o caso do planejamento da operação de curto prazo.

Com relação ao nível de produção e o estado das unidades hidrelétricas, podemos afirmar que, para unidades com características iguais, as soluções obtidas são muito parecidas, o que é esperado.

Como trabalhos futuros se propõe:

- ✓ Estudar a influência de uma função de produção das unidades hidrelétricas mais detalhada, que considere a influência da altura de queda líquida;
- ✓ Aplicar a metodologia proposta neste trabalho a uma configuração hidrotérmica de grande porte;
- ✓ Aprimorar o método de feixes investigando, por exemplo, a compressão de feixes com o objetivo de acelerar o seu processo de solução;
- ✓ Integrar o modelo proposto ao modelo de *unit commitment* termelétrico e adicionar restrições da rede transmissão do sistema.

Por fim, cabe ressaltar que as simplificações na função de produção das unidades hidrelétricas e na modelagem do sistema termelétrico foram necessárias para realização deste trabalho, cujo foco são as metodologias para a solução do problema dual e que se insere em um projeto mais abrangente que possui outros trabalhos associados.

ANEXO A

A.1 INTRODUÇÃO

Neste anexo são apresentadas as implicações em se aproximar a função de produção complexa das unidades hidrelétricas por uma função quadrática côncava. Para tanto utiliza-se como exemplo uma unidade geradora da usina de Ilha Solteira, localizada no Rio Paraná, Estado de São Paulo.

Em uma primeira simplificação, a altura de queda líquida é considerada constante para todo horizonte de planejamento. Posteriormente, a função resultante é aproximada por sua função de produção quadrática côncava.

A.2 ALTURA DE QUEDA LÍQUIDA CONSTANTE

A função de cota montante para a usina hidrelétrica de Ilha Solteira pode ser representada por um polinômio de quarta ordem, como função do volume, v , como mostrado a seguir:

$$fcm = a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + a_4v^4 \quad (\text{A.1})$$

Os coeficientes relacionados com a função da cota de montante da usina de Ilha Solteira, estão apresentadas na Tabela A.1.

Tabela A.1 – Coeficientes do Polinômio da Cota de Montante – Usina de Ilha Solteira.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
293,9248	$3,6010 \times 10^{-3}$	$-1,8461 \times 10^{-7}$	$5,8776 \times 10^{-12}$	-7.5037×10^{-17}

A Equação (A.1) pode ser representada, graficamente, pela Figura A.1, sendo os volumes mínimo e máximo da usina de Ilha Solteira, 8232 e 21060 hm³, respectivamente.

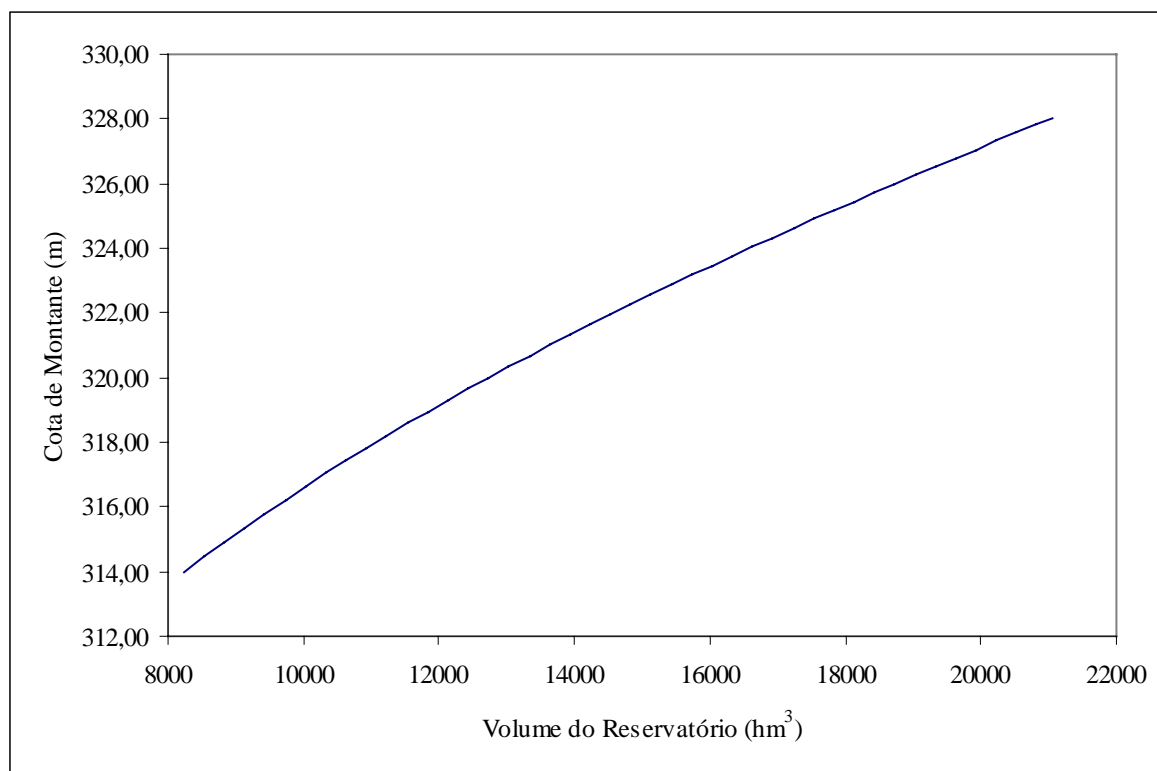


Figura A.1 – Representação da Cota de Montante da Usina de Ilha Solteira

Pelo gráfico apresentado pode-se observar que, a cota de montante da usina, pode excursionar consideravelmente com o volume do reservatório, porém, somente para grandes variações do volume teremos alterações significativas da cota de montante com consequente alteração na queda líquida a que a unidade hidrelétrica está submetida durante os estágios de planejamento. Entretanto, essas variações podem não se verificar no horizonte adotado no problema de *unit commitment*, pois o reservatório da usina de Ilha Solteira, como a maioria dos reservatórios do sistema brasileiro, é de regularização anual, caracterizado por ter variações significativas em seu volume somente em horizonte de longo prazo.

Por meio do que foi exposto, verifica-se que, sob certas considerações, a cota de montante pode não variar significativamente, e assim, pode-se determinar uma cota de montante no início do horizonte de planejamento, baseado no volume conhecido do reservatório, e mantê-la constante até final do horizonte. Entretanto, isto é particularmente verificado para usinas com grande capacidade de regularização, o que não ocorre necessariamente em usinas a fio d'água.

A Figura A.2 apresenta a relação da cota à jusante da usina com a vazão defluente total, d , que passa pela usina em questão, seja pelo canal do vertedouro, s , ou pelas turbinas, Q .

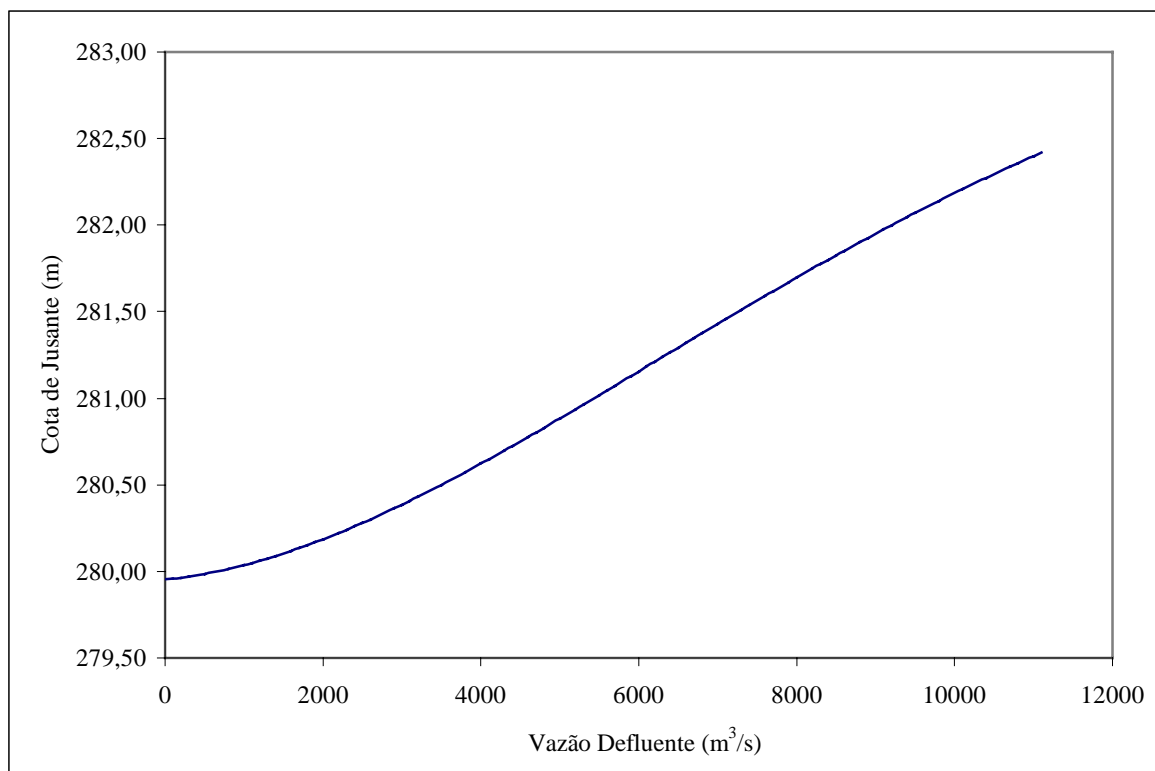


Figura A.2 – Representação da Cota de Jusante da Usina de Ilha Solteira

A função que representa a cota de jusante da usina é mostrada a seguir:

$$fcj(d) = b_0 + b_1(d) + b_2(d)^2 + b_3(d)^3 + b_4(d)^4 \quad (\text{A.2})$$

Os coeficientes relacionados com a função da cota de jusante da usina de Ilha Solteira, estão apresentadas na Tabela A.2

Tabela A.2 – Coeficientes do Polinômio da Cota de Jusante – Usina de Ilha Solteira.

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
279,9539	$4,2685 \times 10^{-5}$	$4,2497 \times 10^{-8}$	$-3,1012 \times 10^{-12}$	$6,5561 \times 10^{-17}$

A cota de jusante é uma parcela de difícil controle, uma vez que, as usinas podem variar a vazão turbinada pelas suas unidades, Q , a cada estágio de tempo t , dentro do horizonte de planejamento e, desta forma, modificando a altura de queda líquida a que as unidades estão submetidas. Desta forma, é necessário investigações mais profundas a respeito da influência da cota a jusante das usinas sobre a operação das unidades hidrelétricas. Contudo, pela Figura A.2, pode-se perceber que a faixa de excursão da cota de jusante da usina de Ilha Solteira é pequena, em comparação à cota de montante, pouco mais de dois metros, se considerarmos que a vazão defluente saía do zero até uma vazão, em torno, de

10.000 m³/s, quando todas as 20 unidades da usina estiverem gerando no máximo e desconsiderando o vertimento. Além desse fato, nem todas as usinas hidrelétricas possuem turbinas de reação, como o exemplo apresentado, e assim a cota a jusante dessas usinas, necessariamente, não influencia na altura de queda líquida das unidades.

Outra parcela que compõe a altura de queda líquida é a perda hidráulica relacionadas às unidades hidrelétricas. Essas perdas, como foi visto no Capítulo 2, podem ser função de duas variáveis distintas: a vazão turbinada exclusivamente pela unidade hidrelétrica, q , e pela soma das vazões de todas as unidades da usina, Q . Entretanto, para uma dada unidade da usina de Ilha Solteira as perdas podem ser aproximadas pela seguinte expressão:

$$p_{jt}^h = k_j q_{jt}^2 \quad (\text{A.3})$$

Podemos representar as perdas hidráulicas, graficamente, em função da vazão turbinada pela unidade como mostra a figura a seguir:

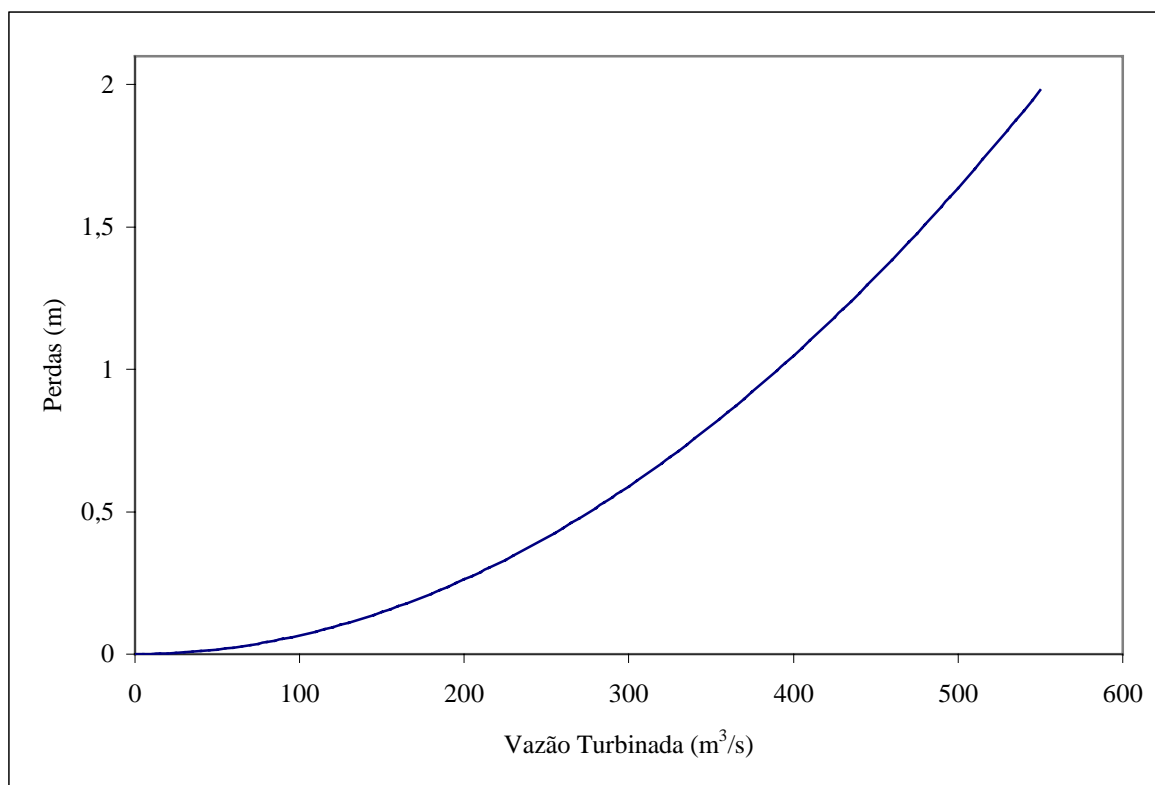


Figura A.3 – Representação das Perdas Hidráulicas de uma Unidade da Usina de Ilha Solteira

Manter a altura de queda líquida constante significa desconsiderar também a influência das perdas, apresentadas na Figura A.3, sobre o processo de produção de energia elétrica pelas unidades hidrelétricas, uma vez que, a vazão turbinada pode variar a cada estágio de tempo t , e, dessa forma, causando desvios na operação do sistema.

A título de exemplo, considera-se uma queda líquida¹ de 39 m obtida pela diferença entre as cotas de montante e de jusante, menos as perdas hidráulicas da turbina, conforme visto no Capítulo 2.

A potência de saída da unidade hidrelétrica escrita como:

$$ph = (9,81 \times 10^3) \times \eta \times q \times hl \quad (\text{A.4})$$

O rendimento, η , obtido a partir da curva colina da unidade, pode ser expresso por:

$$\eta(hl, q) = \rho_0 + \rho_1 q + \rho_2 hl + \rho_3 hlq + \rho_4 q^2 + \rho_5 hl^2 \quad (\text{A.5})$$

Os coeficientes relacionados com a expressão do rendimento estão apresentados na Tabela A.3.

Tabela A.3 – Coeficientes da Função do Rendimento – Unidade Geradora da Usina de Ilha Solteira.

ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
0,25221	$3,299 \times 10^{-3}$	$1,838 \times 10^{-3}$	$5,201 \times 10^{-6}$	$-4,679 \times 10^{-6}$	$-3,4515 \times 10^{-5}$

Substituindo o rendimento, representado por (A.5), e o valor de queda líquida (39m), definido anteriormente, na Expressão (A.4), podemos escrever a potência de saída da unidade hidrelétrica por meio de um polinômio de terceira ordem, como função da vazão turbinada, como mostrado a seguir:

$$ph(q) = c_1 q + c_2 q^2 + c_3 q^3 \quad (\text{A.6})$$

Os coeficientes relacionados com a Expressão (A.6) estão apresentados na Tabela A.4.

Tabela A.4 – Coeficientes da Função de Produção – Unidade Geradora da Usina de Ilha Solteira.

c_1	c_2	c_3
0,1038	$1,3390 \times 10^{-3}$	$1,7901 \times 10^{-6}$

A.3 FUNÇÃO DE PRODUÇÃO QUADRÁTICA CÔNCAVA

A função de produção da unidade geradora hidrelétrica, representada por (A.6), é uma função não-convexa e assim, em uma segunda etapa, essa função deve ser aproximada por uma função quadrática côncava. Usando a expansão por Série de Taylor [38], tem-se:

¹ A queda líquida nominal é de 41m.

$$ph^T(q) = ph(q^0) + ph'(q^0)(q - q^0) + \frac{1}{2} \cdot ph''(q^0)(q - q^0)^2 \quad (A.7)$$

onde:

ph^T é a potência de saída da unidade hidrelétrica aproximada pela expansão por Série de Taylor;

q^0 é a vazão sobre a qual se deseja aproximar a função de produção da unidade, representada por (A.6);

$ph(q^0)$ é a potência de saída da unidade, calculada por (A.6), quando a vazão for q^0 ;

$ph'(q^0)$ é o valor da derivada da função de produção da unidade, representada por (A.6), quando a vazão for q^0 ;

$ph''(q^0)$ é o valor da derivada segunda da função de produção da unidade, representada por (A.6), quando a vazão for q^0 .

Resolvendo as derivadas da Expressão Aproximada (A.7) a função de produção da unidade hidrelétrica fica:

$$ph^T(q) = d_0 + d_1q + d_2q^2 \quad (A.8)$$

Definido q^0 em $330\text{m}^3/\text{s}$, os coeficientes relacionados com a Expressão (A.8) estão mostrados na Tabela A.5.

Tabela A.5 – Coeficientes da Função de Produção Aproximada pelo Método de Newton.

d_0	d_1	d_2
-64,33	0,4027	$-4,332 \times 10^{-4}$

Para a queda líquida de 39 m, a vazão $q_0 = 330\text{m}^3/\text{s}$ corresponde, na curva colina da unidade, a potência de 116 MW e ao rendimento do conjunto turbina-gerador de 92 %.

A Figura A.4 apresenta uma comparação entre as expressões (A.6) e (A.8) que representam a potência produzida pela unidade geradora hidrelétrica.

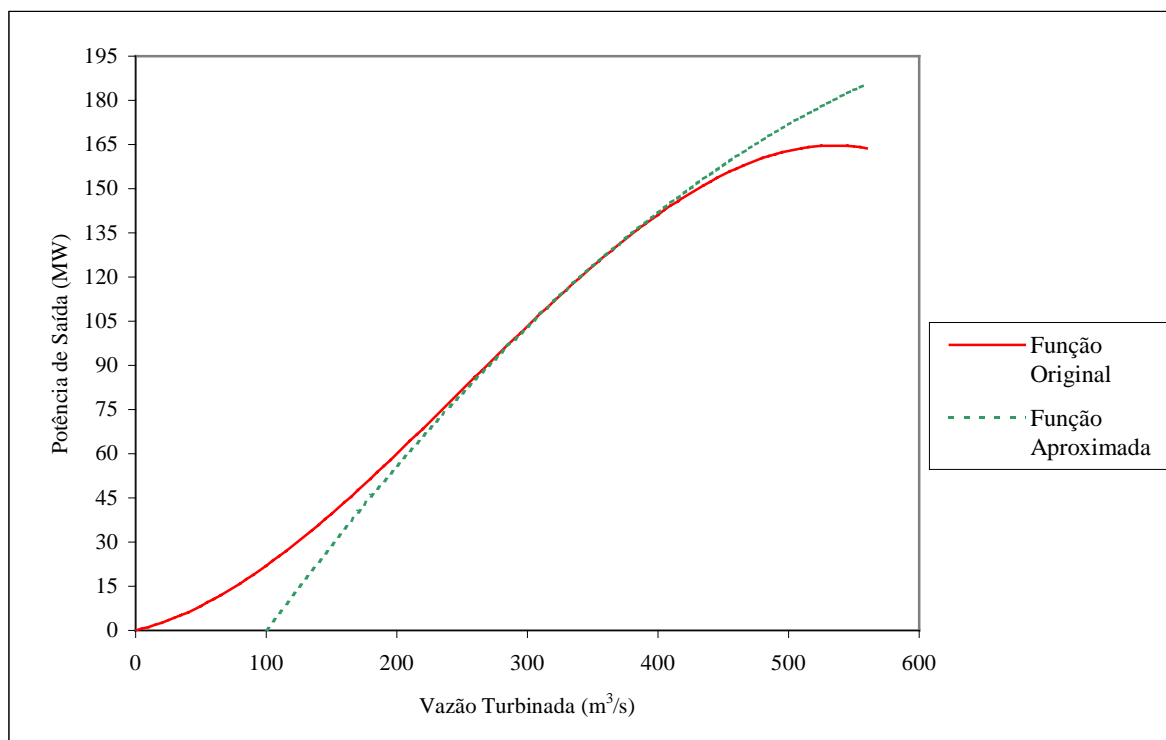


Figura A.4 – Função de Produção Aproximada pelo Método de Newton

A definição do ponto em torno do qual se deseja aproximar a função requer certa atenção, uma vez que, ele determina se a função resultante da aproximação é côncava ou convexa. Neste trabalho são consideradas sempre aproximações quadráticas côncavas para a função de produção das unidades geradoras hidrelétricas.

Assim como a expansão por Série de Taylor, o método dos Mínimos Quadrados [38] também pode fornecer uma aproximação para a função de produção da unidade hidrelétrica, representada por (A.6). Entretanto, para o método dos mínimos quadrados o erro da função aproximada em relação à função original é mais bem distribuído por toda curva, conforme mostra a Figura A.5.

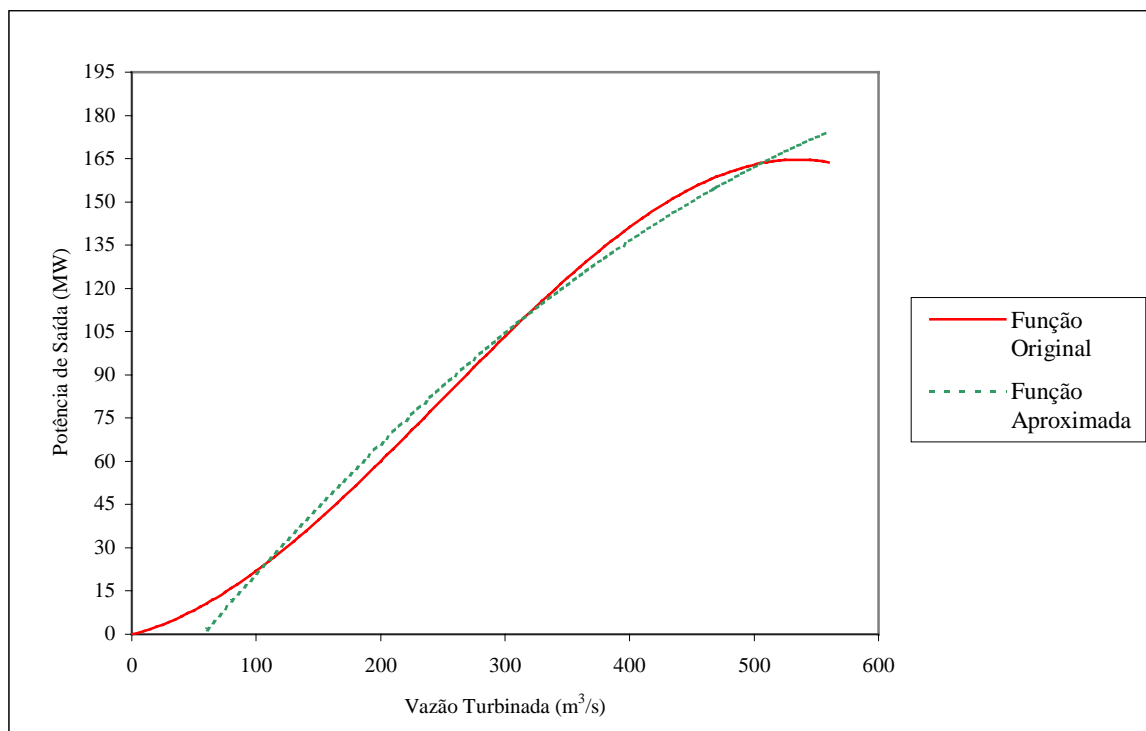


Figura A.5 – Função de Produção Aproximada pelo Método dos Mínimos Quadrados.

A função de produção da unidade hidrelétrica, aproximada pelo método dos mínimos quadrados, pode ser escrita como:

$$ph^Q(q) = e_0 + e_1q + e_2q^2 \quad (\text{A.9})$$

onde:

ph^Q é a potência produzida pela unidade hidrelétrica aproximada pelo método dos mínimos quadrados;

Os coeficientes e_0 , e_1 e e_2 da Função aproximada (A.9), são apresentados na Tabela A.6.

Tabela A.6 – Coeficientes da Função de Produção Aproximada pelo Método dos Mínimos Quadrados.

e_0	e_1	e_2
-30	0,5437	$-3,195 \times 10^{-4}$

A.4 CONCLUSÕES

Neste Anexo é apresentada a função de produção aproximada para as unidades hidrelétricas, que é utilizada nas simulações do sistema hidrotérmico apresentado Capítulo 5.

A função de produção aproximada é obtida em duas fases distintas: inicialmente a altura de queda líquida é considerada constante, e numa segunda etapa a função não-convexa é aproximada por função quadrática côncava.

A aproximação é ilustrada para uma unidade geradora da usina hidrelétrica de Ilha Solteira, localizada no Rio Paraná, Estado de São Paulo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SILVA, E. L. *Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica*. Editora Sagra Luzzatto, Porto Alegre, RS, 2001.
- [2] FINARDI, E. C. Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos Utilizando Computação de Alto Desempenho. Florianópolis, 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica).
- [3] CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA (Cepel); RELATÓRIO-TÉCNICO, Especificação Funcional do Modelo NEWAVE, Ilha do Fundão, RJ, 1999.
- [4] CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA (Cepel); RELATÓRIO TÉCNICO, Especificação Funcional do Modelo DECOMP, Ilha do Fundão, RJ, 1999.
- [5] CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA (Cepel); RELATÓRIO TÉCNICO, Especificação Funcional do Modelo DESSEM, Ilha do Fundão, RJ, 1999.
- [6] FILHO, J. M. A.; Imperativos da Descentralização e Coordenação da Operação Energética no Âmbito da Reforma Institucional do Setor Elétrico Brasileiro, CO-PPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Março de 2000.
- [7] FINARDI, E. C. *Programação da Operação Energética*. Florianópolis, 2001. Qualificação (Doutorado em Engenharia Elétrica).
- [8] NILSSON, O.; SJELVGREN, D. Variable Splitting Applied to Modeling of Start-Up Costs in Short-Term Hydro Generation Scheduling. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 12, n. 2, p. 770-775, May 1997.
- [9] GUAN, X.; SVOBODA, A.; LI, C. A., Scheduling Hydro Power Systems with Restricted Operating Zones and Discharges Ramping Constraints, *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 14, n. 1, p. 126-131, February 1999.
- [10] NI, E.; GUAN, X.; LI, R., Scheduling Hydrothermal Power Systems with Cascaded and Head-Dependent Reservoirs. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 14, n. 3, p. 1127-1132, August 1999.

- [11] LUH, P. B.; ZHANG, D.; TOMASTIK R. N. An Algorithm for Solving the Dual Problem of Hydrothermal Scheduling. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 13, n. 2, p. 593-600, May 1998.
- [12] RUZIC, S.; RAJAKOVIC, N.; VUCKOVIC, A., A Flexible Approach to Short-Term Hydro-Thermal Coordination, PART I: Problem Formulation and General Solution Procedure. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 11, n. 3, p. 1564-1571, August 1996.
- [13] RUZIC, S.; VUCKOVIC, A.; RAJAKOVIC, N., A Flexible Approach to Short-Term Hydrothermal Coordination, PART II: Dual Problem Solution Procedure. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 11, n. 3, p. 1572-1578, August 1996.
- [14] PHILPOTT, A.B.; CRADDOCK, M.; WATERER, M. Hydro-Electric Unit Commitment Subject to Uncertain Demand. *European Journal of Operational Research*. Auckland, New Zealand, v. 125, p. 410-424, 2000.
- [15] LI, C. A.; SVOBODA, A. J.; TSENG, C. L.; JOHNSON, R. B. Hydro Unit Commitment in Hydro-Thermal Optimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 12, n. 2, p. 764-769, May 1997.
- [16] NILSSON, O.; SJELVGREN, D. Hydro Unit Start-Up Costs and Their Impact on the Short-Term Scheduling Strategies of Swedish Power Producers. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 12, n. 1, p. 38-44, February 1997.
- [17] LI, C.; Johnson, R. B.; SVOBODA, A. J.; TSENG, C. *et all*. A Robust Unit Commitment Algorithm for Hydro-Thermal Optimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 13, n. 3, p. 1051-1056, August 1998.
- [18] ZHANG, D.; LUH, P. B.; ZHANG, Y. A Bundle Method for Hydrothermal Scheduling. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, v. 14, n. 4, p. 1355-1361, November 1999.
- [19] WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F. *Power Generation Operation & Control*. John Wiley & Sons, New York 1984.
- [20] LAUER, G. S.; SANDELL, N. R.; BERTSEKAS, D. P.; POSBERGH, T. A. Optimal Short-Term Scheduling of Large-Scale Power Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. AC-28, n. 1, p. 1-11, Jan. 1983.

- [21] LAUER, G. S.; SANDELL, N. R.; BERTSEKAS, D. P.; POSBERGH, T. A., Solution of Large-Scale Optimal Unit Commitment Problems, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, v. PAS-101, n. 1, p. 79-86, Jan. 1982.
- [22] MUCKSTADT, J. A.; KOENIG, S. A. An Application of Lagrangian Relaxation to Scheduling in Power-Generation Systems. *Operations Research*. v. 25, n. 3, May-June 1977.
- [23] CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA (Cepel), RELATÓRIO TÉCNICO. *Implementação do Unit Commitment das Usinas Térmicas no Modelo DESSEM*. Ilha do Fundão, RJ, 1999.
- [24] FELTENMARK, S. *On Optimization of Power Pruduction*. Estolcomo, 1997. Tese (Doutorado em Matemática)
- [25] SHEBLE, G. B.; FAHD, G. N., Unit Commitment Literature Synopsis, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 1, p. 128-135, February 1994.
- [26] NILSSON, O.; SJELVGREN, D. Mixed-Integer Programming to Short-Term Planning of a Hydro-Thermal System, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 1, p. 281-286, February 1996.
- [27] <http://www.ons.org.br>, Endereço Internet do Operador Nacional do Sistema Elétrico.
- [28] BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Massachusetts, 1999.
- [29] BAZARAA, S. M.; SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming*. John Wiley & Sons, Atlanta, 1979.
- [30] LASDON, L. S., *Optimization Theory of Large Systems*, Macmillan Company, New York, 1970.
- [31] FRANGIONI, A. *Dual-Ascent Methods and Multicommodity Flow Problems*. Pisa, 1997. Tese (Doutorado em Informática).
- [32] LEMARÉCHAL, C.; SAGASTIZÁBAL, C. Variable Metric Bundle Methods: from Conceptual to Implementable Forms. *Preprint Submitted to Elsevier Science*. France, Feb. 1996.
- [33] KIWIEL, K. C. Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin, v. 1133, p. 300-344, 1985.

- [34] SCHRAMM, H.; ZOWE, J. A Version Of The Bundle Idea for Minimizing a Nonsmooth Function: Conceptual Idea, Convergence Analysis, Numerical Results. *SIAM Journal Optimization*, v. 2, n. 1, p. 121-152, Feb. 1992.
- [35] KIWIEL, K. C. Proximity Control in Bundle Methods for Convex Nondifferentiable Minimization. *Mathematical Programming*, North-Holland, v. 46, p. 105-122, 1990.
- [36] GROSS, G.; FINLAY, D.; DELTAS, G.; 1999. Strategic Bidding in Electricity Generation Supply Markets. In: IEEE PES WINTER MEETING (Feb. 1999) *Power Engineering Society Winter Meeting, IEEE*, vol. 1, p. 309-315.
- [37] GÓMEZ, T.; VÁSQUEZ, C.; 1998. *The Spanish Day Ahead Energy Market*. Instituto de Investigación Tecnológica, Universidad Pontificia Comillas, Madrid. <http://www.iit.upco.es> Oct. 1998.
- [38] SOARES, S.; LYRA, C.; TAVARES, H. Optimal Generation Scheduling of Hydrothermal Power Systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*. New York, v. PAS-99, n. 3, p. 1107-1118, 1980.
- [39] WOLSEY, L. A. *Integer Programming*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
- [40] ZHUANG, F.; GALIANA, F. D. Towards a More Rigorous and Practical Unit Commitment by Lagrangian Relaxation, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, n. 2, p. 763-772, May 1988.
- [41] CENTRAIS ELÉTRICAS BRASILEIRAS S.A. (ELETROBRÁS). *Relatório de Caracterização da Carga, Sistema Interligado Sul-Sudeste*. Rio de Janeiro, RJ, 1999.
- [42] CLÁUDIO, D. M.; MARINS, J. M. *Cálculo Numérico Computacional, Teoria e Prática*. Editora Atlas S.A., São Paulo, SP, 1994.
- [43] FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. *AMPL: A Modeling Language For Mathematical Programming*. Boyd & Fraser Publishing Company, Massachusetts, 1993.
- [44] ILOG, CPLEX 7.1: User's Manual. March 2001.
- [45] ILOG, AMPL CPLEX System: AMPL Syntax Update, Version 7.0.
- [46] ILOG, AMPL CPLEX System: User's Guide, Version 7.0.